ИНФОРМАТИКА

10

класс

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- множество
- пустое множество
- пересечение двух множеств
- объединение двух множеств
- дополнение множества
- мощность множества
- формула включений-исключений

ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

Множество — совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА

Перечисление всех элементов множества	Словесное описание множества
M = {1, 3, 5, 7, 9}	множество однозначных нечетных чисел
$A = \{x \mid 10 \leq x < 100\}$	множество целых двузначных чисел
B = {0, 1}	цифры двоичного алфавита
C = {А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я}	гласные буквы русского алфавита

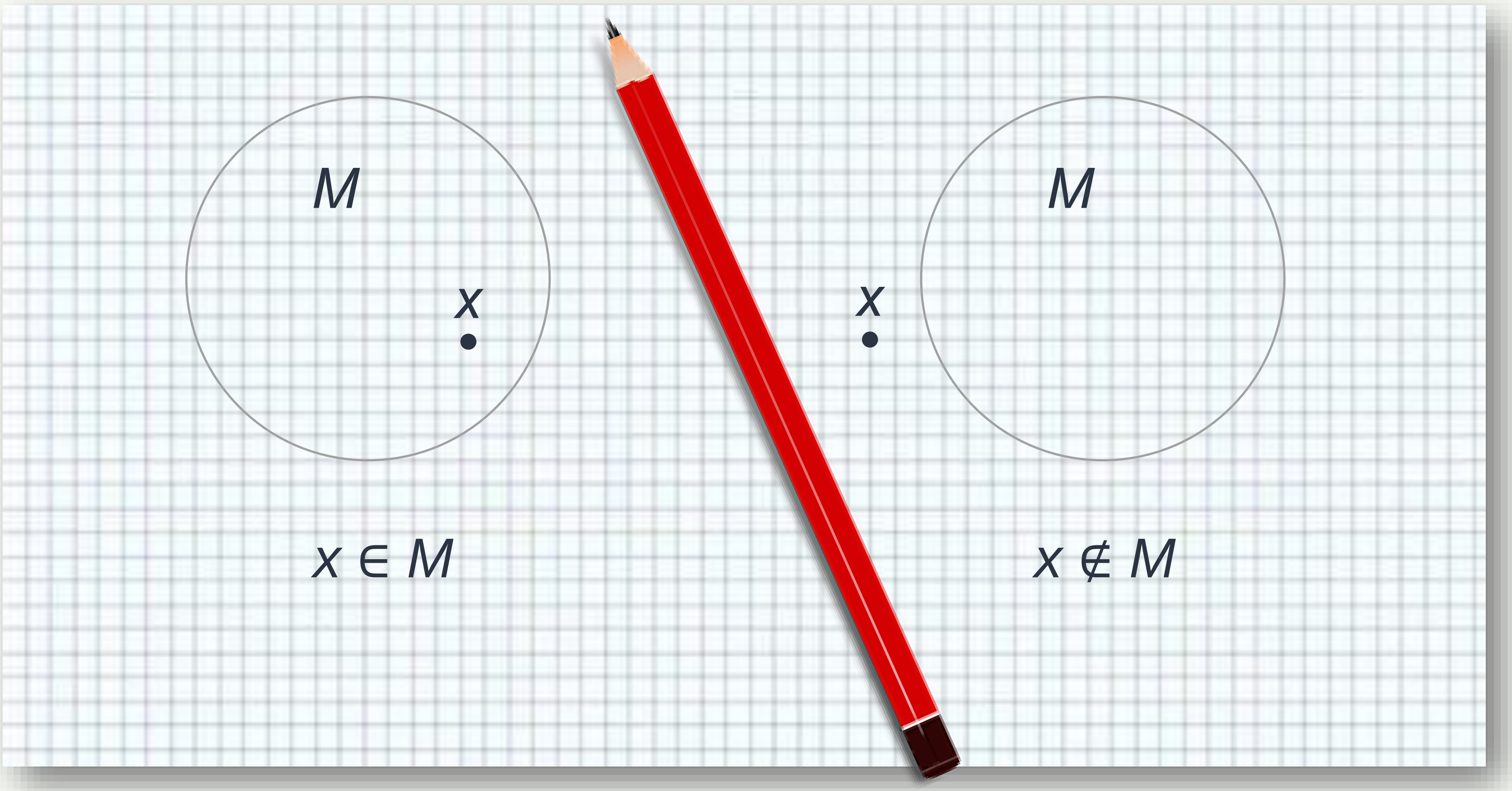
СТАНДАРТНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, …). Объекты, входящие в состав множества, называются его *элементами* и обозначаются строчными латинскими буквами.

Описание	Обозначение
x - элемент множества M (x принадлежит множеству M)	$x \in M$
x не является элементом множества M (x не принадлежит M)	$x \notin M$
мощность (количество элементов) множества M	$\lvert M \rvert$
пустое множество – множество, в котором нет ни одного элемента	$\varnothing$

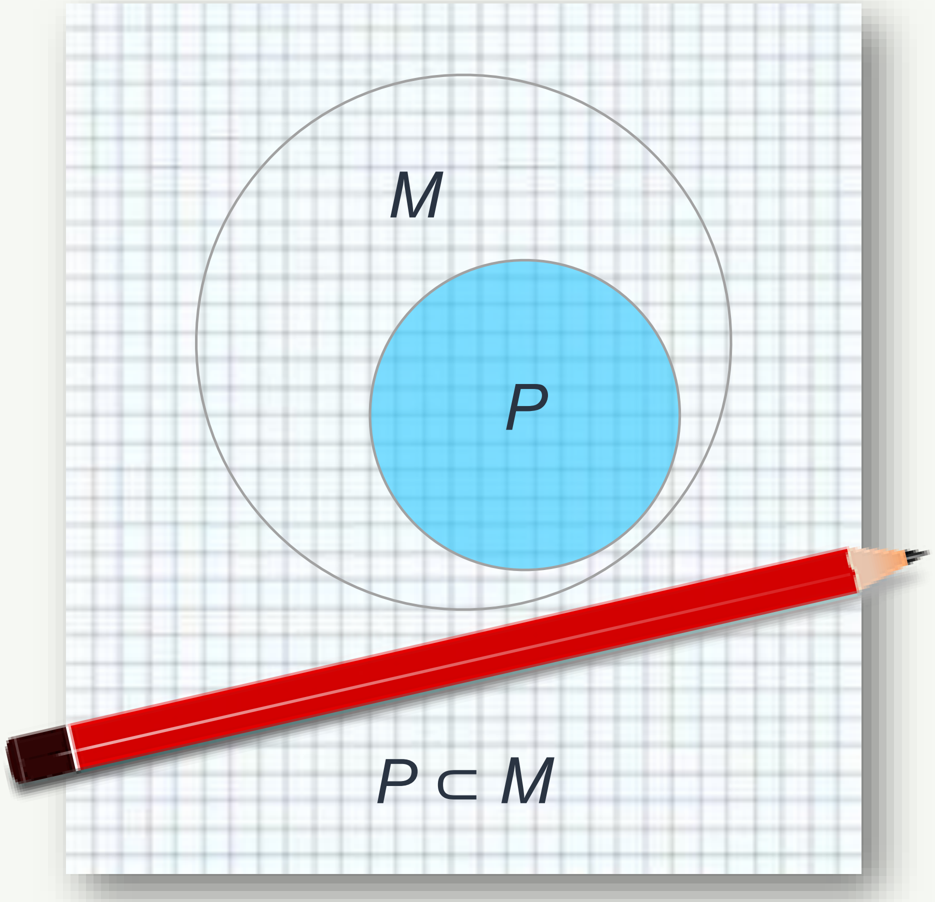
КРУГИ ЭЙЛЕРА

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера.
Точки внутри круга считаются элементами множества.



ПОДМНОЖЕСТВО

Если каждый элемент множества *P* принадлежит множеству *M*, то говорят, что *P* есть **подмножество** *M*, и записывают:



Само множество *M* является своим подмножеством:

$M \subset M$

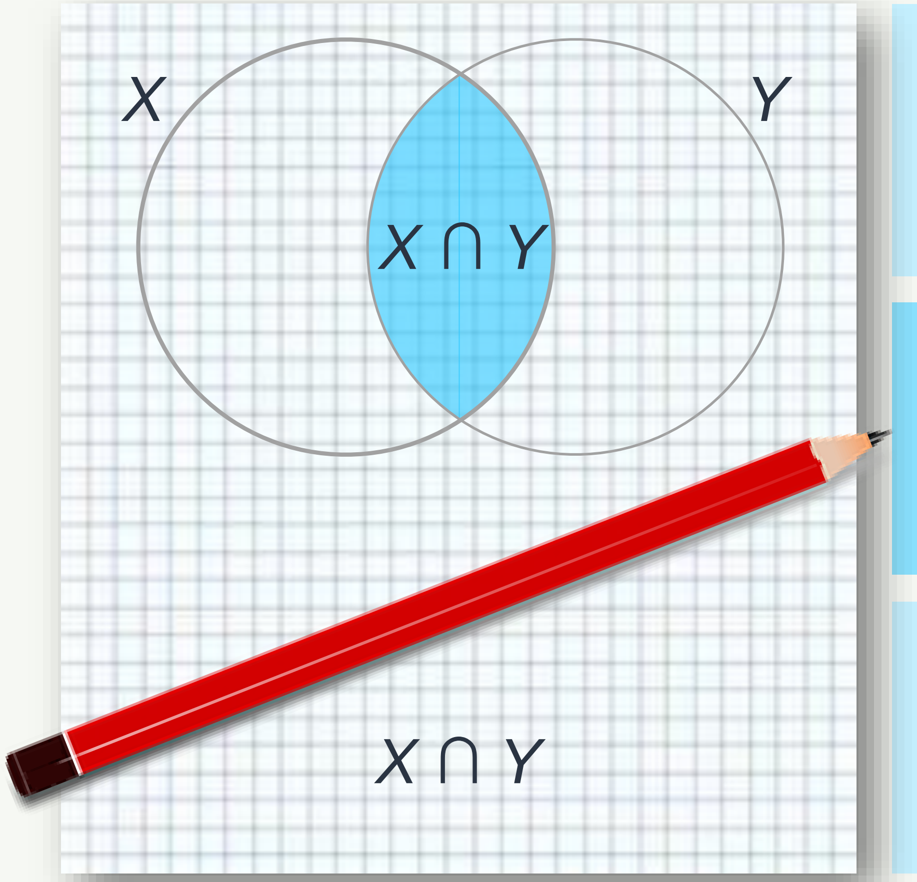
Пустое множество является подмножеством *M*:

$\emptyset \subset M$

Универсальное множество содержит все возможные подмножества одной природы. Обозначается буквой U.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов. Обозначается $X \cap Y$.



Множества M и X не имеют общих элементов:

$M \cap X = \emptyset$

P подмножество множества M:

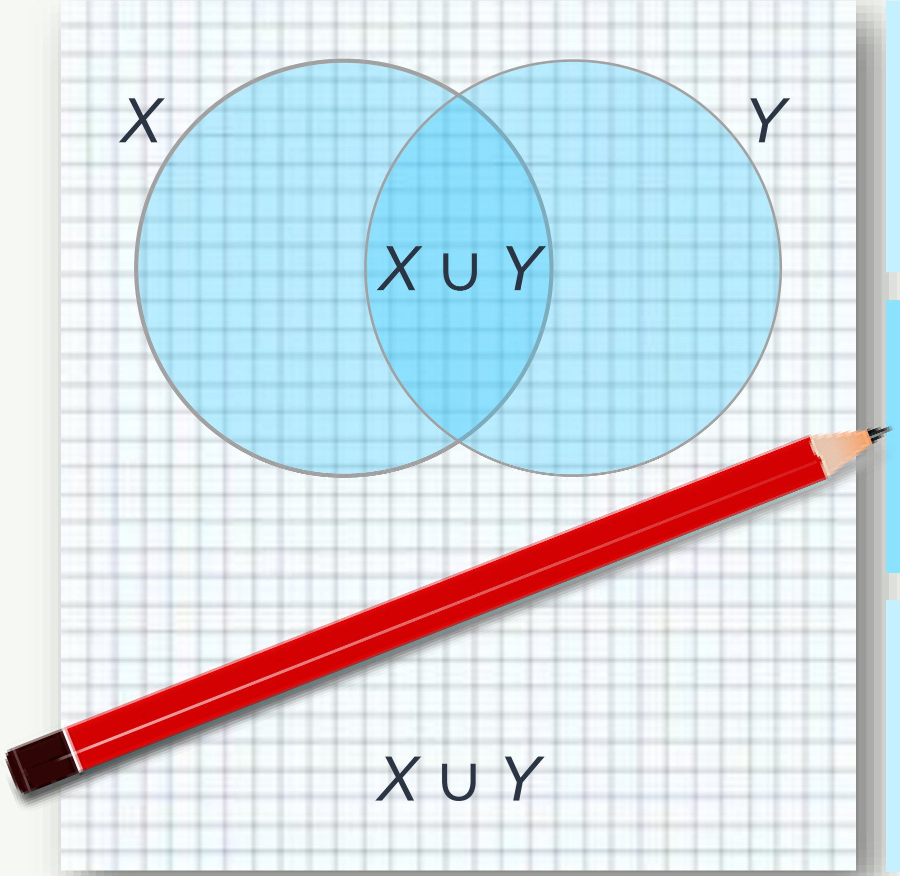
$M \cap P = P$

Пересечение множеств M и M:

$M \cap M = M$

ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов ($X \cup Y$).



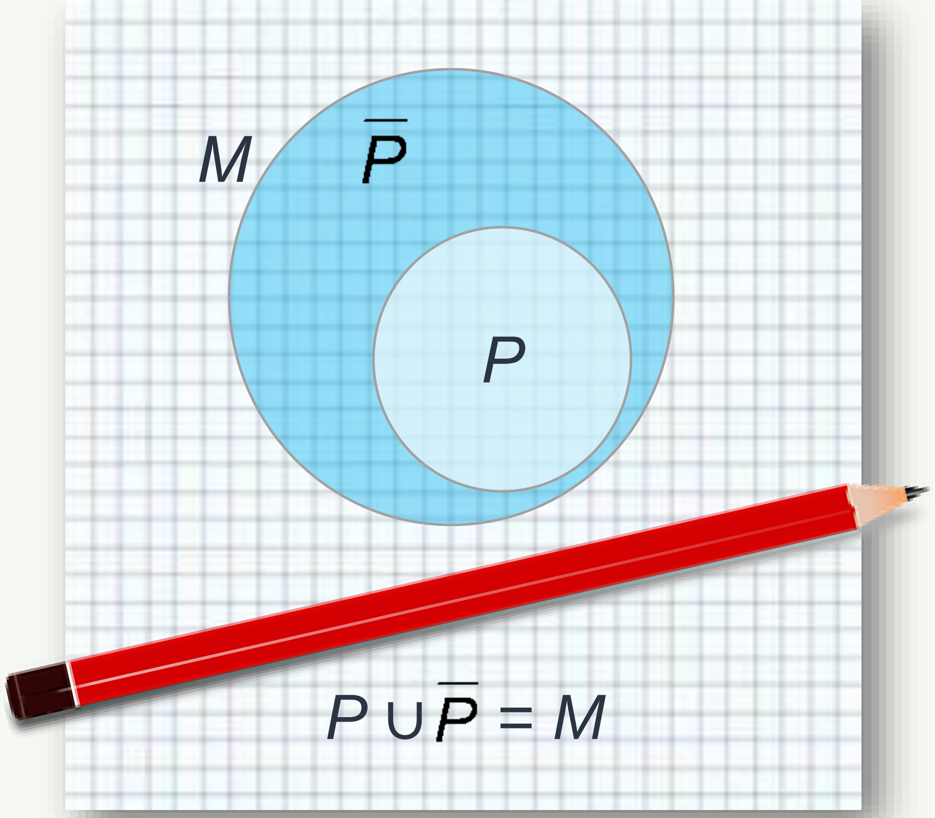
$M \cup \emptyset = M$

P подмножество множества M:
$M \cup P = M$

Объединение множеств M и M:
$M \cup M = M$

ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВА

Пусть множество *P* является *подмножеством* множества *M*. **Дополнением** *P* до *M* называется множество, состоящее из тех элементов *M*, которые не вошли в *P*. Дополнение P до M обозначают $\overline{P}$: $\overline{P}$= {7, 9}



Дополнение *M* до *M*:

M: $\overline{M} = \emptyset$

Дополнение пустого множества до *M*:

$\overline{\emptyset} = M$

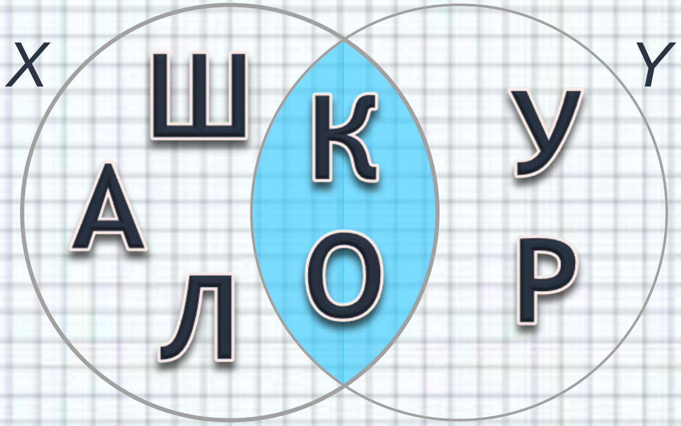
Дополнение множества M до универсального:

$M \cup \overline{M} = U$

ПРИМЕРЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ

X = {Ш,К,О,Л,А}

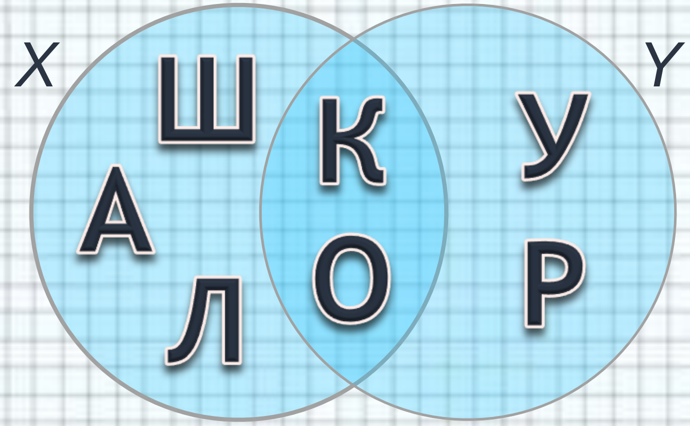
Y = {У,Р,О,К}



X ∩ Y = {К,О}

X = {Ш,К,О,Л,А}

Y = {У,Р,О,К}



X ∪ Y = {Ш,К,О,Л,А,У,Р}

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

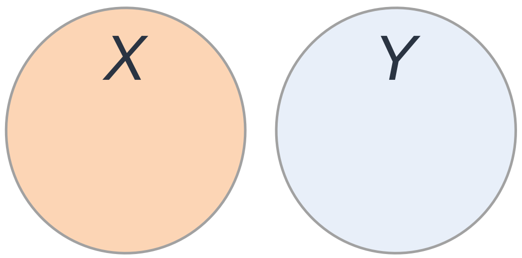
Мощность множества *X* обозначается |*X*|.

Множество	Мощность
пустое множество	$\|\varnothing\| = 0$
А - множество букв русского алфавита	| А | = 33
В = {зима, весна, лето, осень}	| В | = 4

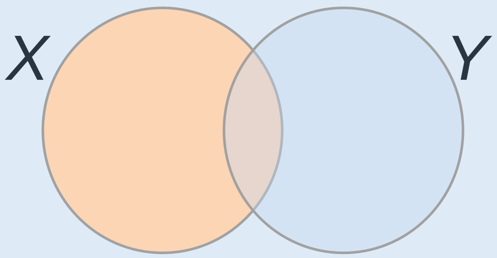
Мощность любого *конечного* множества равно количеству элементов данного множества.
Два множества являются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

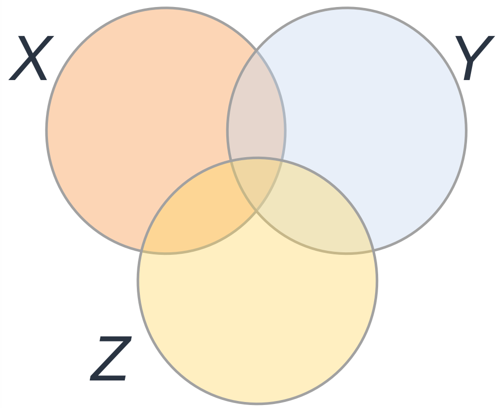
Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).



$|X \cup Y| = |X| + |Y|$



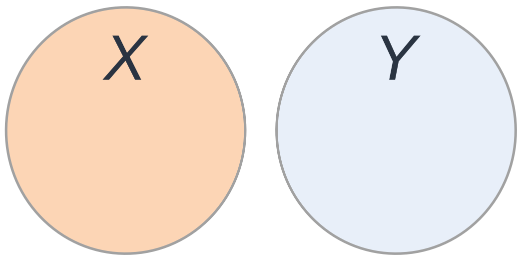
$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$



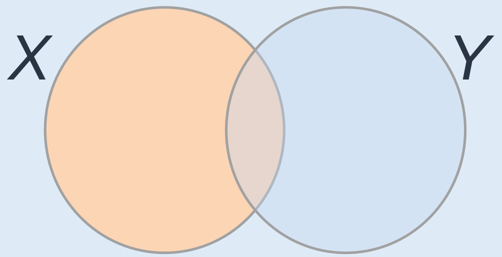
$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ

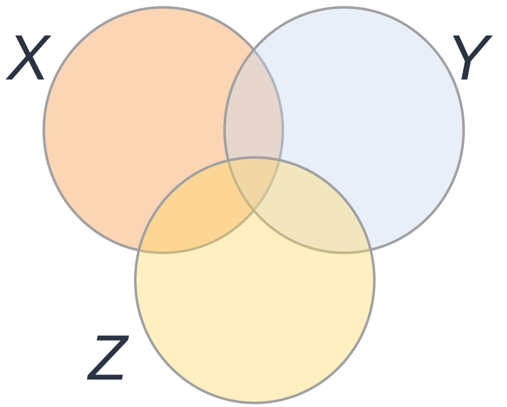
Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).



$|X \cap Y| = 0$



$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$



$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|$

ПРИМЕР 1

В зимний лагерь отправляется 100 старшеклассников. Почти все они увлекаются сноубордом, коньками или лыжами. При этом многие из них занимаются несколькими видами спорта. Всего кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на лыжах — 28, на коньках — 42. Умением кататься на лыжах и сноуборде могут похвастаться 8 ребят, на лыжах и коньках — 10, на сноуборде и коньках — 5, но только трое из них владеют всеми тремя видами спорта. Сколько ребят не умеет кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках?

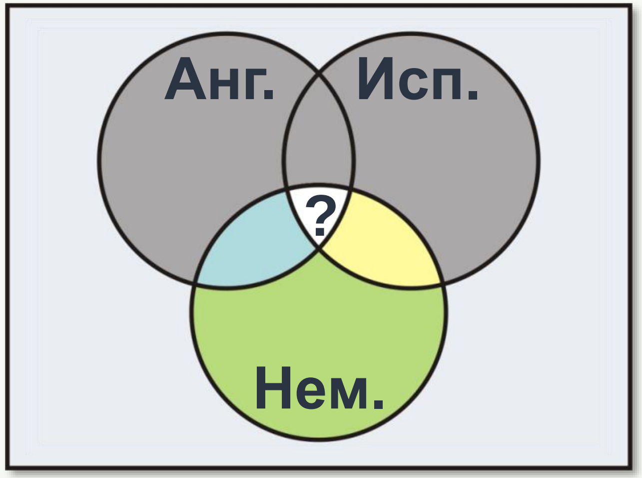
Обозначим через S, L и K множество сноубордистов, лыжников и любителей коньков соответственно. Тогда:

$|S \cup L \cup K| = |S| + |L| + |K| - |S \cap L| - |S \cap K| - |L \cap K| + |S \cap L \cap K| = 30 + 28 + 42 - 8 - 5 - 10 + 3 =$

$=80 \quad \Rightarrow \quad 100 - 80 = 20$

ПРИМЕР 2

Из *100* человек *85* знают английский язык, *80* - испанский, *75* - немецкий. *Каждый владеет хотя бы одним языком*. Сколько человек знают все три языка? Укажите множество решений.



1. 100 - 85 = 15 (чел.) – не знают английского
2. 100 - 80 = 20 (чел.) – не знают испанского
3. 100 - 75 = 25 (чел.) – не знают немецкого

ИЛИ

4. 15 + 20 +25 = 60 (чел.) –могут знать два языка
5. 100 - 60 = 40 (чел.) –знают три языка

4. (15 + 20 +25) : 2 = 30 (чел.) – могут знать только один язык
5. 100 - 30 = 70 (чел.) – знают три языка

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Пересечением двух множеств *X* и *Y* называется множество их общих элементов.

Объединением двух множеств *X* и *Y* называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Пусть множество *P* является подмножеством множества *M*. Дополнением *P* до *M* называется множество, состоящее из тех элементов *M*, которые не вошли в *P*.

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Формула включений-исключений позволяет вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Если множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 2, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 3, то что будет:

1) пересечением этих множеств;
2) объединением этих множеств?

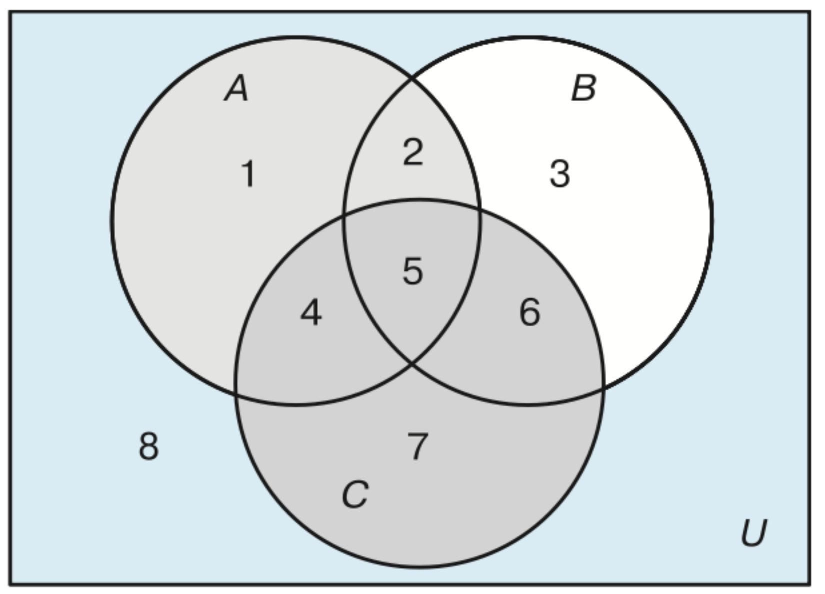
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 18, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 14. Укажите наименьшее число, входящее:

1) в пересечение этих множеств;
2) 2) в объединение этих множеств.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть *A*, *B* и *C* — некоторые множества, обозначенные кругами, *U* — универсальное множество.



С помощью операций объединения, пересечения и дополнения до универсального множества выразите через *A*, *B* и *C* следующие множества:

1) 1 U 2 U 3 U 4 U 5 U 6;

2) 2 U 5;

3) 5;

4) 2 U 4 U 5 ;

5) 1 U 2 U 3;

6) 8.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

В первую смену в лагере «Дубки» отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. При этом 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличниками, и спортсменами, и победителями олимпиад. Сколько ребят отдыхало в лагере?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Старшеклассники заполняли анкету с вопросами об экзаменах по выбору. Оказалось, что выбрали они информатику, физику и обществознание. В классе 38 учеников. Обществознание выбрал 21 ученик, причём трое из них выбрали ещё и информатику, а шестеро — ещё и физику. Один ученик выбрал все три предмета. Всего информатику выбрали 13 учеников, пятеро из которых указали в анкете два предмета. Надо определить, сколько учеников выбрали физику.