



ИНФОРМАТИКА

10
класс

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ
ЛОГИКИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- ◆ законы алгебры логики
- ◆ коммутативные законы
- ◆ ассоциативные законы
- ◆ дистрибутивные законы
- ◆ закон противоречия
- ◆ закон идемпотентности
- ◆ закон двойного отрицания
- ◆ законы де Моргана
- ◆ законы поглощения

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Законы алгебры логики (свойства логических операций) позволяют упростить процесс анализа истинности логического выражения с большим количеством переменных и операций.

Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

A	\overline{A}	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

A	\overline{A}	$A \vee \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

A	\overline{A}	$A \& \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Все законы могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Законы де Моргана

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Доказательство закона де Моргана

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \& \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Переместительные законы

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \& B = B \& A$$

Упростить выражения: $A \vee A \& B$; $A \& (A \vee B)$

$$A \vee A \& B = A \& 1 \vee A \& B = A \& (1 \vee B) = A \& 1 = A$$

Закон поглощения (I)

$$A \vee (A \& B) = A$$

$$A \& (A \vee B) = A \& A \vee A \& B = A \vee A \& B = A$$

Закон поглощения (II)

$$A \& (A \vee B) = A$$



ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Распределительный
(дистрибутивный) закон (II)

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$(A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$(A \vee B) \& A \vee (A \vee B) \& C$$

$$A \& (A \vee B) \vee C \& (A \vee B)$$

$$A \vee C \& (A \vee B)$$

$$A \vee A \& C \vee C \& B$$

$$A \vee B \& C$$

Доказательство

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

Переместительный

$$A \& B = B \& A$$

Поглощения

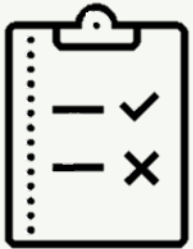
$$A \& (A \vee B) = A$$

Распределительный

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

Поглощения

$$A \vee A \& B = A$$

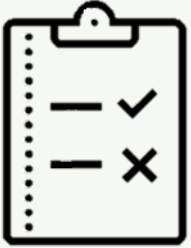


ПРИМЕР 1

Упростим логическое выражение $A \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C}$.

$$A \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C} = A \& B \& (C \vee \bar{C}) = A \& B \& 1 = A \& B$$



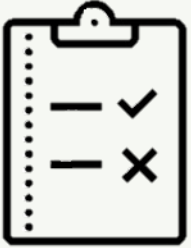


ПРИМЕР 2

Упростим логическое выражение $(A \vee B) \& (A \vee B \vee C) \& (A \vee B \vee \bar{C})$.

$$(A \vee B) \& (A \vee B \vee C) \& (A \vee B \vee \bar{C}) = (A \vee B) \& (0 \vee C \vee \bar{C}) = (A \vee B) \& 1 = A \vee B$$





ПРИМЕР 3

На числовой прямой даны отрезки $B = [5; 10]$, $C = [3; 20]$ и $D = [15; 25]$. Найти целое число – длину отрезка A , чтобы предикат

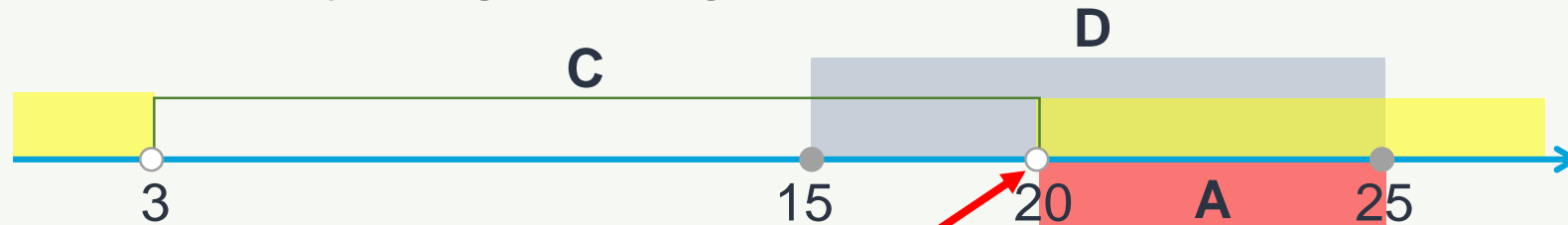
$$((x \in D) \rightarrow (x \in C)) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \notin A) \& (x \in B))$$

становился истинным высказыванием при любых значениях x . Если ответов несколько, то выбрать отрезок максимальной длины.

Заменяем предикаты вида $x \in M$ на \overline{M} (высказывание обозначается соответствующей буквой множества) и выполним преобразования:

Законы алгебры логики выполняются для операций объединения, пересечения и дополнения множеств. $D \cap \overline{C} \cup \overline{A} = U$ Ответ не зависит от отрезка B

$$A \cup \overline{A} = U \quad D \cap \overline{C} = A$$



Ответ: 4





ПРИМЕР 4

На числовой прямой даны отрезки $B = [2; 12]$ и $C = [7; 18]$. Каким должен быть отрезок A , чтобы предикат $(x \in A) \vee ((x \in B) \rightarrow (x \in C))$ становился истинным высказыванием при любых значениях x ?

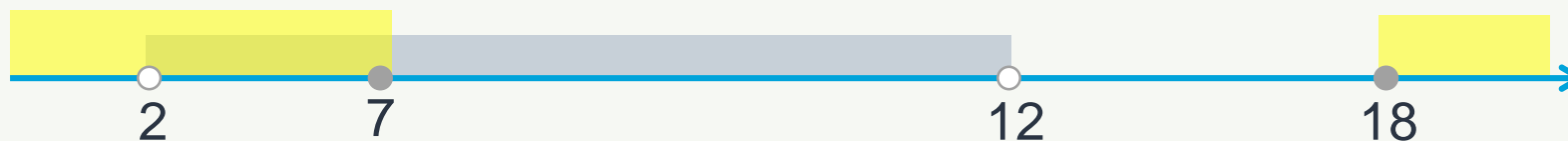
$$\begin{aligned}(x \in A) \vee ((x \in B) \rightarrow (x \in C)) &= (x \in A) \vee ((\overline{x \in B}) \vee (x \in C)) = \\ &= (x \in A) \vee (\overline{x \in B}) \vee (x \in C)\end{aligned}$$

A , B и C - множества $A \vee \overline{B} \vee C = U$

Известно, что $A \vee \overline{A} = U$ $\overline{A} = \overline{B} \vee C$ $A = \overline{\overline{B} \vee C}$ минимально возможное множество A

Множество B — это отрезок $[2; 12]$.

Множество C — это промежутки $]-\infty; 7[$ и $]18; +\infty[$.





ПРИМЕР 5

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа a выражение

$$(x \& 28 \neq 0 \vee x \& 45 \neq 0) \rightarrow (x \& 17 = 0 \rightarrow x \& a \neq 0)$$

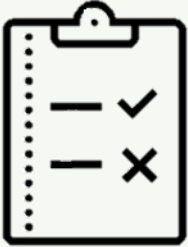
тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)? Здесь $\&$ — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.

$$27 - 11011_2, 22 = 10110_2 \quad 27 \& 22 = 11011 \& 10110 = 10010_2 = 18_{10}$$

$$\begin{array}{r} \& 11011 \\ 10110 \\ \hline 10010 \end{array}$$

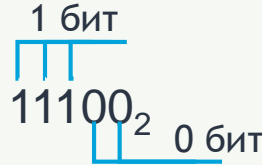
Введём обозначения: $M(x) = (x \& 28 \neq 0)$, $N(x) = (x \& 45 \neq 0)$,
 $K(x) = (x \& 17 = 0)$, $A(x) = (x \& a \neq 0)$.

$$\begin{aligned} (M(x) \vee N(x)) \rightarrow (K(x) \rightarrow A(x)) &= \overline{M(x) \vee N(x)} \vee \overline{K(x) \rightarrow A(x)} = \\ &= \overline{(M(x) \vee N(x)) \& K(x)} \vee A(x) \end{aligned}$$



ПРИМЕР 5

Рассмотрим предикат $M(x) = (x \& 28 \neq 0)$.



Если и 4-й, и 3-й, и 2-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \& 28 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $N(x) = (x \& 45 \neq 0)$.

101101₂

Если и 5-й, и 3-й, и 2-й, и 0-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \& 45 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $K(x) = (x \& 17 = 0)$.

10001₂

Побитовая конъюнкция 17 и x будет равна нулю, если в числе x 4-й и 0-й биты будут содержать нули. Множество истинности этого предиката — все x с нулями в 4-м и 0-м битах.

$$\overline{(M \vee N) \& K} \vee A = U$$

$$A \vee \overline{A} = U$$

$$A = (M \vee N) \& K$$

Объединением множеств M и N являются все двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 4, 3, 2, 0 содержит единицу. Пересечением этого множества с множеством K будут все двоичные числа, у которых биты с номерами 4 и 0 будут заняты нулями, т. е. такие двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 содержит 1. Все эти числа образуют множество A .

Искомое число a должно быть таким, чтобы при любом неотрицательном целом значении переменной x : $x \& a \neq 0$, и кроме того, оно должно быть минимальным из возможных. **Требуемое число $101100_2 = 44_{10}$.**





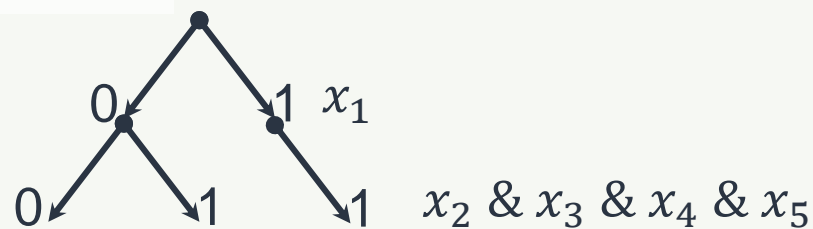
ПРИМЕР 6

Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \& (x_1 \rightarrow x_3) \& (x_1 \rightarrow x_4) \& (x_1 \rightarrow x_5) = 1 \\ (y_1 \& y_2) \vee (y_1 \& y_3) \vee (y_1 \& y_4) \vee (y_1 \& y_5) = 1 \end{cases}$$

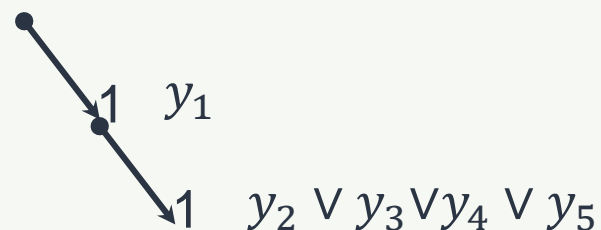
$$\begin{cases} \bar{x}_1 \vee x_2 \& x_3 \& x_4 \& x_5 = 1 \\ y_1 \& (y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5) = 1 \end{cases}$$

Важное свойство логических выражений: количество решений и первое уравнение равно количеству решений второго уравнения.



$$1 \cdot 15 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 17$$

$x_2 \& x_3 \& x_4 \& x_5 = 1$
в единичном случае



$$1 \cdot 15 = 15$$

$y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5 = 1$
в 15 случаях.

$$17 \cdot 15 = 255$$

Ответ: 255

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

Для $n = 2$ существует 16 различных логических функций.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1



ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

A	B	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀	F ₁₁	F ₁₂	F ₁₃	F ₁₄	F ₁₅	F ₁₆
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F(A,B)=0$

$F(A,B)=A \& B$

$F(A,B)=\overline{A \rightarrow B}$

$F(A,B)=A$

$F(A,B)=\overline{B \rightarrow A}$

$F(A,B)=B$



$F(A,B)=A \mid B = \overline{A \& B}$
штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ)

$F(A,B)=A \downarrow B = \overline{A \vee B}$
стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ)



СОСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных. Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\bar{A} \& \bar{B} \& C$
0	1	0	1	$\bar{A} \& B \& \bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A \& \bar{B} \& C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

II способ

При построении функции можно ориентироваться как на 0, так и на 1 в последнем столбце.

F=1, если во 2-ой, **ИЛИ** в 3-ей, **ИЛИ** в 6-ой строке стоят 1.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка.

$$F = \bar{A} \& \bar{B} \& C \vee \bar{A} \& B \& \bar{C} \vee A \& \bar{B} \& C$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Используя законы логики, можно записать функцию через другие операции.

СОСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ПО ТАБЛИЦЕ ИСТИННОСТИ И ЕГО УПРОЩЕНИЕ

Алгоритм составления логического выражения по таблице истинности достаточно прост. Для этого надо:

- 1) отметить в таблице истинности наборы переменных, при которых значение логического выражения равно единице;
- 2) для каждого отмеченного набора записать конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание;
- 3) все полученные конъюнкции связать операциями дизъюнкции.





ПРИМЕР 7

Имеется следующая таблица истинности:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$\bar{A} \& B \& \bar{C}$

$\bar{A} \& B \& C$

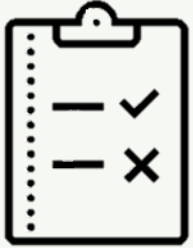
$A \& B \& \bar{C}$

$$\begin{aligned} & \bar{A} \& B \& \bar{C} \vee \bar{A} \& B \& C \vee A \& B \& \bar{C} = B \& (\bar{A} \& \bar{C} \vee \bar{A} \& C \vee A \& \bar{C}) = \\ & = B \& (\bar{A} \& (\bar{C} \vee C) \vee A \& \bar{C}) = B \& (\bar{A} \& 1 \vee A \& \bar{C}) = B \& (\bar{A} \vee A \& \bar{C}) = \\ & = B \& (\bar{A} \vee A) \& (\bar{A} \vee \bar{C}) = B \& 1 \& (\bar{A} \vee \bar{C}) = \\ & = B \& (\bar{A} \vee \bar{C}) = B \& \overline{A \& C} \end{aligned}$$

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, так как за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

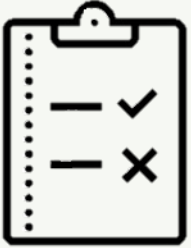
Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Какие из рассмотренных законов алгебры логики аналогичны законам алгебры чисел, а какие — нет?

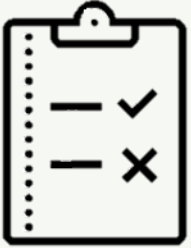




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Докажите второй закон де Моргана с помощью таблиц истинности.





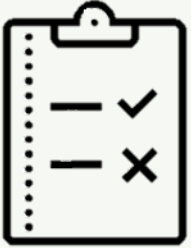
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Путём преобразования докажите равносильность высказываний:

$$\text{а) } \overline{(A \& \bar{B}) \vee (B \& \bar{C})} \text{ и } (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& C) \vee (B \& C);$$

$$\text{б) } (A \& B) \vee \overline{(A \& \bar{C})} \text{ и } (A \& B) \vee \bar{A} \vee C.$$





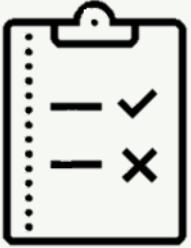
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Упростите логическую формулу:

а) $(A \& B \& \bar{C}) \vee (A \& B \& C) \vee (A \& B)$;

б) $(A \& B \vee A \& B \& \bar{C} \vee B \& \bar{C} \vee C) \& (\bar{C} \vee A \& C \vee \bar{A} \& B \& \bar{C})$.





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Найдите X , если $\overline{(XVA)} \vee \overline{(XV\bar{A})} = B$.

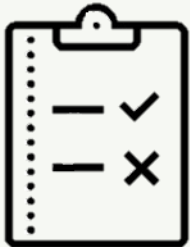




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10; 25]$ и $Q = [20; 55]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A , что выражение $(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$ истинно при любом значении переменной x .



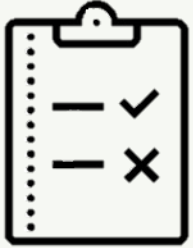


ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $Q = \{2, 6, 12, 18, 24\}$.

Известно, что выражение $(x \in Q) \rightarrow \overline{(x \in A)} \rightarrow \overline{(x \in P)}$ истинно при любом значении переменной x . Определите наименьшее возможное количество элементов множества A .





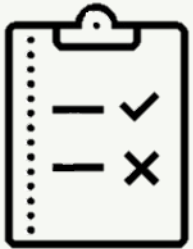
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

На числовой прямой даны два отрезка:

$M = [10; 60]$ и $N = [40; 80]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что выражение

$(x \in M) \rightarrow (((x \in M) \& \overline{(x \in A)}) \rightarrow \overline{(x \in M)})$ истинно при любом значении переменной x .

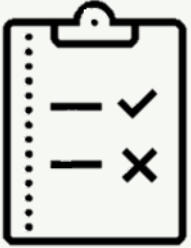




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа A формула $x \& 25 \neq 0 \rightarrow (x \& 17 = 0 \rightarrow x \& A \neq 0)$ тождественно истинна, т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x ? (Здесь $\&$ — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)





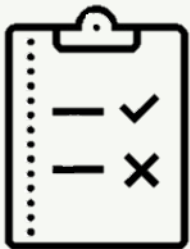
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Определите наибольшее натуральное десятичное число A , при котором выражение

$$((x \& 46 = 0) \vee (x \& 18 = 0)) \rightarrow ((x \& 115 \neq 0) \vee (x \& A = 0))$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любом натуральном значении десятичной переменной x . (Здесь $\&$ — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)





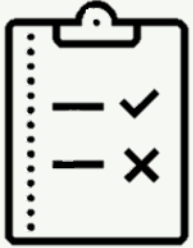
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$а) \begin{cases} x_1 \& x_2 \rightarrow x_3 \& x_4 = 1; \\ \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \& x_6 = 1. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \& x_4 = 1; \\ \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \& x_6 = 1; \\ \overline{x_5} \vee \overline{x_6} \vee x_7 \& x_8 = 1; \\ \overline{x_7} \vee \overline{x_8} \vee x_9 \& x_{10} = 1. \end{cases}$$





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько существует различных логических функций от четырёх переменных?



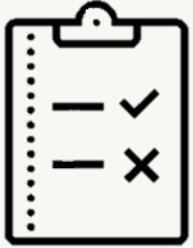


ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1 , F_2 .

A	B	F_1	F_2
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

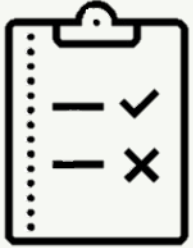




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По известным таблицам истинности запишите аналитическое представление импликации, эквиваленции и строгой дизъюнкции.

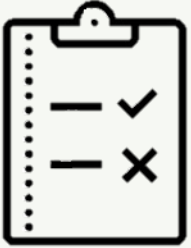




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Логические функции **штрих Шеффера** и **стрелка Пирса** названы так в честь математиков, исследовавших их свойства. Подготовьте краткую биографическую справку об одном из этих учёных.



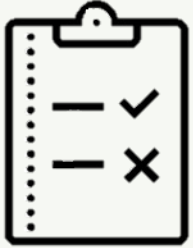


ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1 , F_2 .

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Запишите логическое выражение для логической функции $F(A, B, C)$, равной 1 на наборах 011, 101, 110, 111. Попробуйте упростить полученное выражение.

