



ИНФОРМАТИКА

8

класс

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- ◆ логическая переменная
- ◆ логическое значение
- ◆ логическая операция
- ◆ логическое отрицание
- ◆ логическое умножение
- ◆ логическое сложение
- ◆ приоритет логических операций
- ◆ логическое выражение

ЛОГИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ($A = 1$), а если ложно - нулём ($B = 0$).

0 и **1** называются **логическими значениями**.



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ: КОНЪЮНКЦИЯ

Конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Другое название: **логическое умножение**

Обозначения: \wedge , \times , **&** , **И**

Таблица истинности:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A И B</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица логического умножения:

И	0	1
0	0	0
1	0	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ: ДИЗЪЮНКЦИЯ

Дизъюнкция - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Другое название: **логическое сложение**

Обозначения: **\vee , \mid , ИЛИ, $+$**

Таблица истинности:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A ИЛИ B</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица логического сложения:

ИЛИ	0	1
0	0	1
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ: ИНВЕРСИЯ

Инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Другое название: **логическое отрицание**

Обозначения: **НЕ, \neg , $\bar{}$**

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

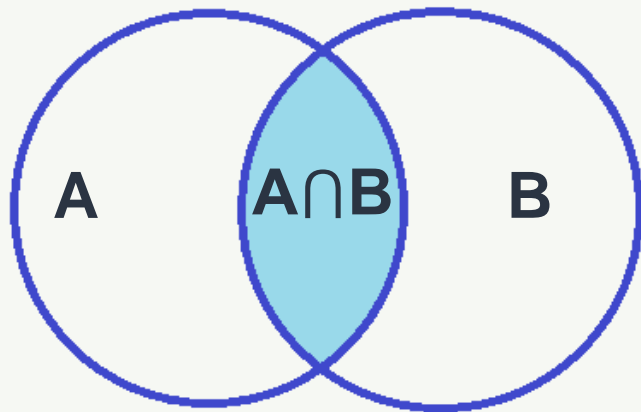


НАЗВАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

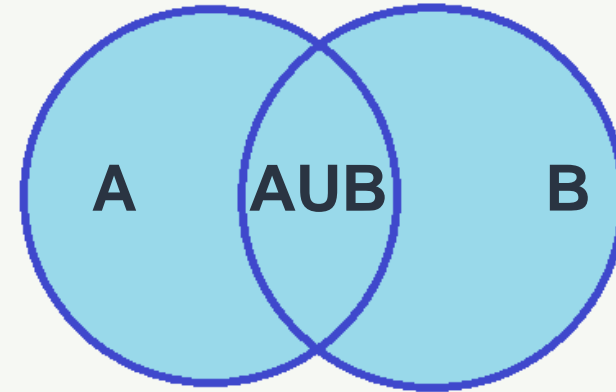
Логическая связка	Логическая операция	Другое название	Обозначение
НЕ	Логическое отрицание	Инверсия	$\neg, \bar{}$
И	Логическое умножение	Конъюнкция	$\wedge, \cdot, \&$
ИЛИ	Логическое сложение	Дизъюнкция	$\vee, +, $

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Пересечение множеств



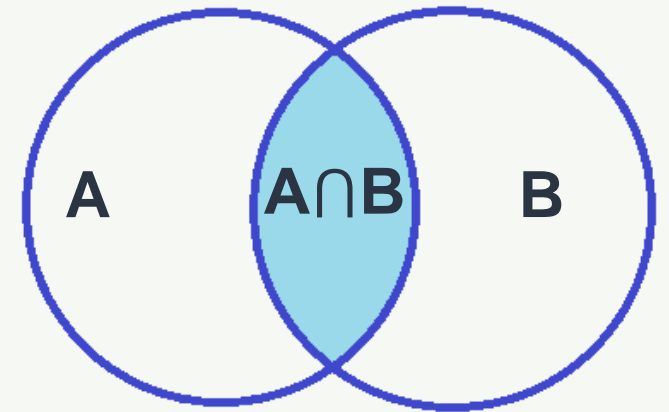
Объединение множеств



ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ: ПЕРЕСЕЧЕНИЕ

Пусть A — множество веб-страниц, на которых встречается слово «крейсер»,
 B — множество веб-страниц, на которых встречается слово «линкор».

Пересечением множеств A и B будет множество страниц, на которых встречаются оба эти слова одновременно.



Пересечение множеств

$A \cap B$ — это множество истинности высказывательной формы «На веб-странице встречается слово “крейсер” и слово “линкор”», представляющей собой конъюнкцию высказывательных форм A — «На веб-странице встречается слово “крейсер”», B — «На веб-странице встречается слово “линкор”».

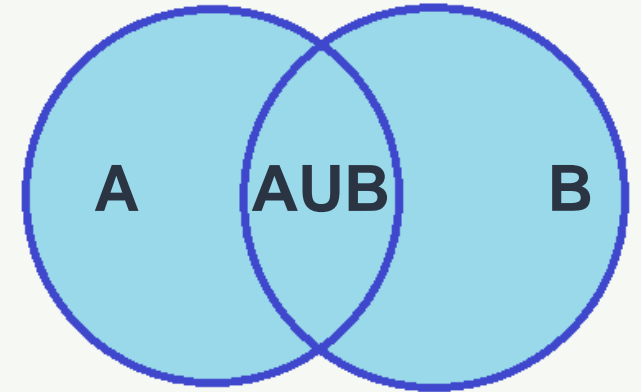


ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ: ОБЪЕДИНЕНИЕ

Пусть A — множество веб-страниц, на которых встречается слово «крейсер»,
 B — множество веб-страниц, на которых встречается слово «линкор».

Объединение множеств A и B будет множество страниц, на которых встречаются хотя бы одно из этих слов, а также оба эти слова одновременно.

$A \cup B$ — это множество истинности высказывательной формы «На веб-странице встречается слово “крейсер” или слово “линкор”», представляющей собой дизъюнкцию высказывательных форм A — «На веб-странице встречается слово “крейсер”», B — «На веб-странице встречается слово “линкор”».



Объединение множеств



РЕШАЕМ ЗАДАЧУ

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции ИЛИ используется символ «|», а для обозначения логической операции И — символ «&».

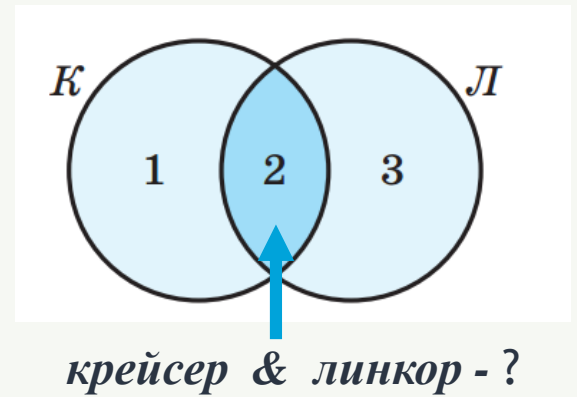
В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
<i>крейсер</i>	4800
<i>линкор</i>	4500
<i>крейсер линкор</i>	7000

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу
крейсер & линкор?



Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
<i>крейсер</i>	4800
<i>линкор</i>	4500
<i>крейсер линкор</i>	7000



Запрос	Найдено страниц (в тысячах)	Мощность множеств, соответствующих запросам
<i>крейсер</i>	4800	$N_1 + N_2$
<i>линкор</i>	4500	$N_2 + N_3$
<i>крейсер линкор</i>	7000	$N_1 + N_2 + N_3$
<i>крейсер & линкор</i>	?	N_2

$$(N_1 + N_2) + (N_2 + N_3) = (N_1 + N_2 + N_3) + N_2$$

$$N_2 = (N_1 + N_2) + (N_2 + N_3) - (N_1 + N_2 + N_3) = 4800 + 4500 - 7000 = 2300.$$

Ответ:
2300 тыс. страниц



ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Логическое выражение — это запись составного высказывания, составленная

- ◆ из логических переменных,
- ◆ логических значений,
- ◆ знаков логических операций,
- ◆ скобок.

Логические операции имеют следующий приоритет:
инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Для вычисления значения логического выражения необходимо:

- 1) вычислить значения выражений в скобках (при наличии скобок);
- 2) выполнить логические операции в соответствии с их приоритетом.



ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

$$A \vee 0 = A$$

— нулевой операнд не может повлиять на результат логического сложения, который будет полностью зависеть от значения A

$$A \wedge 0 = 0$$

— так как один из операндов равен 0 , то результат логического умножения тоже будет равен 0 , независимо от того, чему равно A

$$A \vee 1 = 1$$

— так как один из операндов равен 1 , то логическая сумма будет равна 1 при любом значении A

$$A \wedge 1 = A$$

— единичный операнд не может повлиять на результат логического умножения, который будет полностью зависеть от значения A .

ПРИМЕР

Пусть $X=0$. Определим истинность высказывания
 $(X < 13)$ **И** **НЕ** $(X < 2)$.

Вначале определим истинность простых высказываний:

$0 < 13$ — истинное высказывание;

$0 < 2$ — истинное высказывание.

Запишем логическое выражение, соответствующее исходному высказыванию, и вычислим его значение:

$$1 \wedge \neg 1 = 1 \wedge 0 = 0.$$



ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

Закон	Арифметика	Математическая логика
Переместительный	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$a \vee b = b \vee a$ $a \wedge b = b \wedge a$
Сочетательный	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
Распределительный	$a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot b$	$a \wedge (b \vee c) = a \wedge c \vee a \wedge b$

ЗАДАЧА

В соревнованиях по гимнастике участвуют Алла, Валя, Сима и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

1. Сима будет первой, Валя — второй;
2. Сима будет второй, Даша — третьей;
3. Алла будет второй, Даша — четвёртой.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно из высказываний истинно, другое — ложно. Какое место на соревнованиях заняла каждая из девушек, если все они оказались на разных местах?



РЕШЕНИЕ

Рассмотрим простые высказывания:

C_1 = «Сима заняла первое место», B_2 = «Валя заняла второе место»;

C_2 = «Сима заняла второе место», D_3 = «Даша заняла третье место»;

A_2 = «Алла заняла второе место», D_4 = «Даша заняла четвёртое место».

По условию задачи: 1) $C_1 + B_2 = 1$, $C_1 \cdot B_2 = 0$;

2) $C_2 + D_3 = 1$, $C_2 \cdot D_3 = 0$;

3) $A_2 + D_4 = 1$, $A_2 \cdot D_4 = 0$.

Логическое произведение истинных высказываний – истинно:

$$(C_1 + B_2) \cdot (C_2 + D_3) \cdot (A_2 + D_4) = 1$$



Раскроем скобки – как на уроках математики:

$$(C_1 + B_2) \cdot (C_2 + D_3) \cdot (A_2 + D_4) = 1$$

$$(C_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot D_3 + B_2 \cdot C_2 + B_2 \cdot D_3) \cdot (A_2 + D_4) = 1$$

$$C_1 \cdot C_2$$
$$B_2 \cdot C_2$$

ложные
высказывания

$$(C_1 \cdot D_3 + B_2 \cdot D_3) \cdot (A_2 + D_4) = 1$$

$$C_1 \cdot D_3 \cdot A_2 + C_1 \cdot D_3 \cdot D_4 + B_2 \cdot D_3 \cdot A_2 + B_2 \cdot D_3 \cdot D_4 = 1$$
$$C_1 \cdot D_3 \cdot A_2 = 1$$

Ответ: Сима заняла первое место, Алла — второе, Даша — третье.
Следовательно, Валя заняла четвёртое место.



В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**. 0 и 1, обозначающие значения логических переменных, называют логическими значениями.

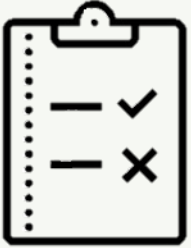
Заменяя высказывания логическими переменными, можно рассматривать логические связки как логические операции над переменными.

Инверсия — логическая операция, ставящая в соответствие высказыванию новое высказывание, значение которого противоположно значению исходного.

Конъюнкция — логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Дизъюнкция — логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Логическое выражение — это запись составного высказывания, составленная из логических переменных, логических значений, знаков логических операций и скобок.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

В следующих составных высказываниях выделите простые высказывания, обозначив каждое из них буквой; запишите с помощью букв и знаков логических операций каждое составное высказывание.

- а) Число 376 чётное и трёхзначное.
- б) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
- в) Новый год мы встречаем на даче или на Красной площади.
- г) Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
- д) Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
- е) На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть

A = « A не нравятся уроки математики»,

B = « A не нравятся уроки химии».

Выразите следующие логические выражения на обычном языке:

а) $A \wedge B$

г) $A \vee B$

ж) $\overline{A \wedge B}$

б) $\bar{A} \wedge B$

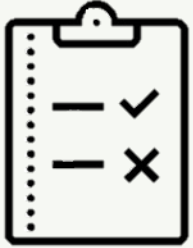
д) $A \vee \bar{B}$

з) $\overline{A \vee B}$

в) $A \wedge \bar{B}$

е) $\bar{A} \vee B$

и) $\overline{A \wedge \bar{B}}$



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Найдите значения выражений:

а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$

б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$

в) $(0 \wedge 1) \wedge 1$

г) $1 \wedge (1 \wedge 1) \wedge 1$

д) $((1 \vee 0) \wedge (1 \wedge 1)) \wedge (0 \vee 1)$

е) $((1 \wedge 1) \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$

ж) $((0 \wedge 0) \vee 0) \wedge (1 \vee 1)$

з) $(A \vee 1) \vee (B \vee 0)$

и) $((1 \wedge A) \vee (B \wedge 0)) \vee 1$

к) $1 \wedge A \wedge 0$





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть

A = «Первая буква имени — гласная»,

B = «Четвёртая буква имени — согласная».

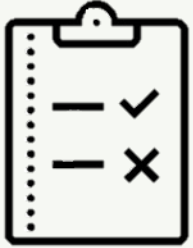
Найдите значение логического выражения $\bar{A} \vee B$ для следующих имён:

а) ЕЛЕНА

б) ВАДИМ

в) АНТОН

г) ФЁДОР



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть $A = \langle X < 3 \rangle$, $B = \langle X \geq 5 \rangle$.

Найдите значение логического выражения $\bar{A} \wedge \bar{B}$ для следующих значений числа X :

- а) 2
- б) 3
- в) 4
- г) 5
- д) 6





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K = \{1, 3, 5\}$, $P = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

Запишите в фигурных скобках области истинности следующих высказывательных форм:

а) $(x \in M) \wedge (x \in P)$

б) $(x \in K) \wedge (x \in P)$

в) $x \in M \cap P$

г) $x \in K \cup P$



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

В языке запросов поискового сервера для обозначения логической операции ИЛИ используется символ «|», а для обозначения логической операции И — символ «&». В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет.

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
крейсер линкор	3700
крейсер & линкор	400
линкор	1800

Какое количество страниц (в тысячах) будет найдено по запросу *крейсер*?



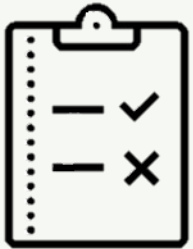


ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Определите **наименьшее** целое число X , для которого **ИСТИННО** высказывание:

НЕ ($X < 59$) **И** **НЕ** (X — чётное).





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Определите **наибольшее** целое число X , для которого истинно высказывание:

НЕ ($X \geq 60$) **И** **НЕ** (X — нечётное).





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ



Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения.

- 1) Алёша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке».
- 2) Боря: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
- 3) Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Инверсия

A	\bar{A}
0	1
1	0

Конъюнкция

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Приоритет выполнения логических операций: \neg , $\&$, \vee .