

ИНФОРМАТИКА

9

класс

РЕКУРСИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

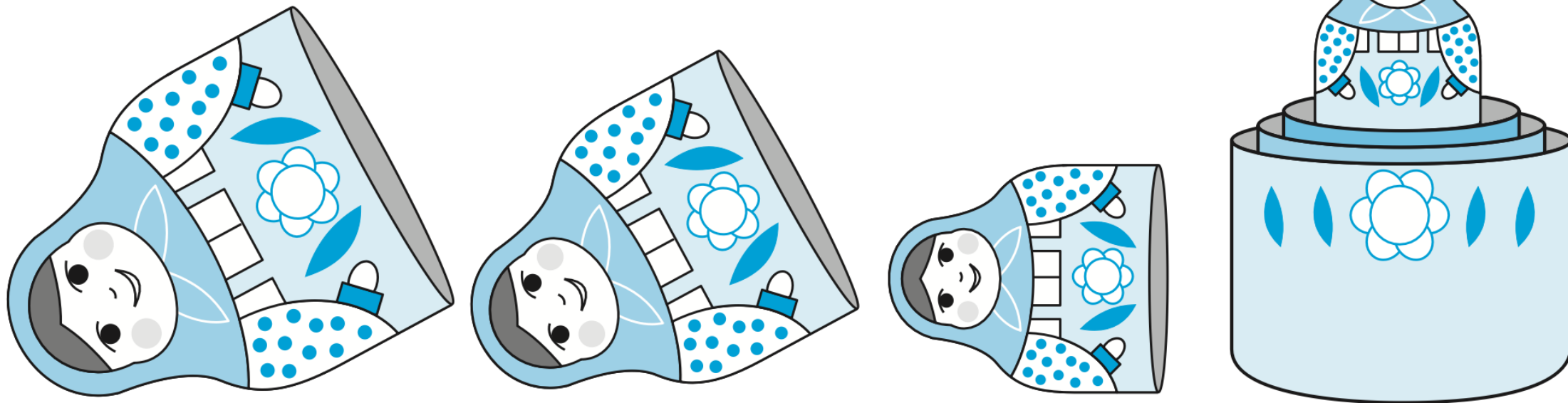
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- ◆ рекурсивный алгоритм
- ◆ рекурсивная процедура
- ◆ рекурсивная функция

РЕКУРСИЯ

Рекурсия — это определение объекта через обращение к этому же объекту.

Любой объект, который частично определяется через самого себя, является рекурсивным. Нас окружает множество рекурсивных объектов.



РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ

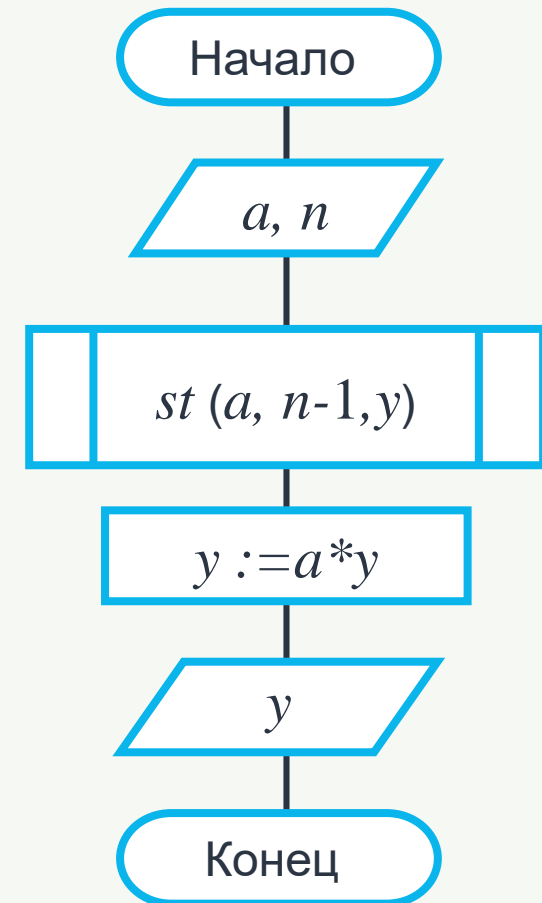


Алгоритм, в котором прямо или косвенно содержится ссылка на него же как на вспомогательный алгоритм, называют **рекурсивным**.

РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ

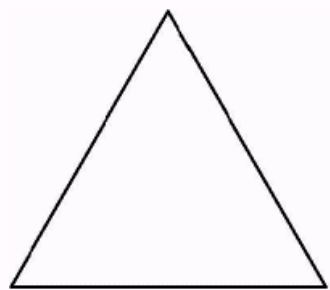
Алгоритм вычисления степени с натуральным показателем n для любого вещественного числа a :

a^n можно получить, если будет известно a^{n-1} , которое достаточно будет умножить на a .

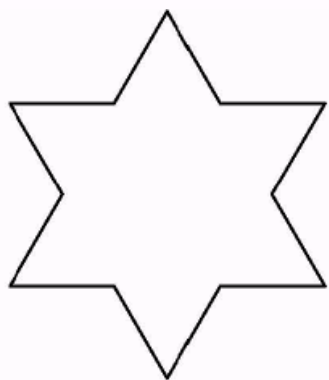


СНЕЖИНКА КОХА

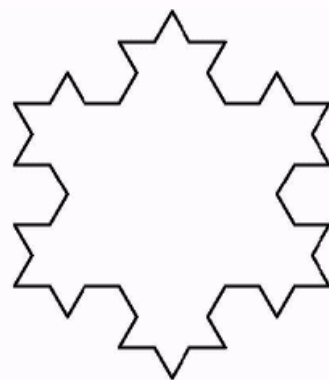
На очередном шаге средняя треть каждого из имеющихся отрезков заменяется двумя новыми отрезками той же длины.



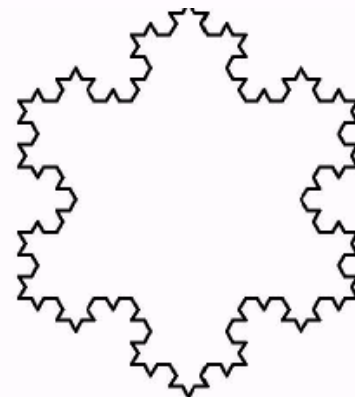
*Начальное
состояние*



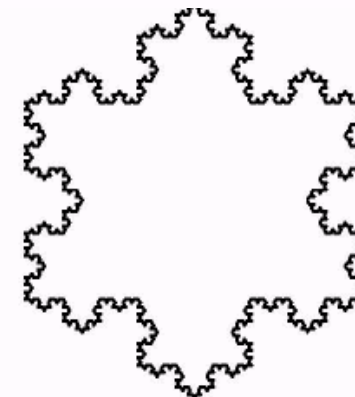
*Первый
шаг*



*Второй
шаг*



*Третий
шаг*



РЕКУРСИВНЫЕ ПОДПРОГРАММЫ

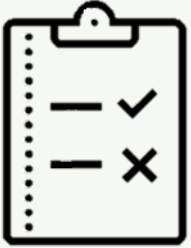
Рекурсивные алгоритмы на языке программирования можно записывать с помощью рекурсивных подпрограмм — процедур и функций.

Рекурсивная процедура — это процедура, вызывающая сама себя.

Составим рекурсивную процедуру для решения знакомой вам задачи получения числа-перевертыша.

```
def refl(n):  
    if n == 0: return  
    print(n % 10, end="")  
    refl(n // 10)
```

Обратите внимание! При $n = 0$ вычисления прекращаются; $n = 0$ — это **условие окончания рекурсии**. Без такого условия рекурсивный алгоритм будет выполняться бесконечно.



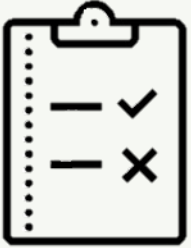
ПРИМЕР

Составим рекурсивную процедуру, которая для заданного целого числа выводит на экран его запись в двоичной системе счисления. Так, если задано число 123, то результатом работы процедуры должно быть число 1111011.

Для перевода целого десятичного числа в двоичную систему счисления нужно последовательно выполнять деление данного числа и получаемых неполных частных на 2 до тех пор, пока не получим неполное частное, равное нулю. Представление исходного числа в двоичной системе счисления образуется путём последовательной записи полученных остатков, начиная с последнего.

Использование рекурсии позволяет подойти к решению задачи перевода целого числа в двоичную систему счисления принципиально иначе.





ПРИМЕР

Чем отличается двоичная запись числа n от двоичной записи числа $n // 2$?

Дополнительной последней цифрой: если к двоичной записи числа $n // 2$ приписать справа результат операции $n \% 2$, то мы получим двоичную запись числа n . Следовательно, чтобы получить двоичную запись числа n , надо сначала получить двоичную запись числа $n // 2$.

```
def bin(n):  
    if n == 0: return  
    bin(n // 2)  
    print(n % 2, end="»")  
    n = n // 2
```



РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Рекурсивная функция — это функция, вызывающая сама себя.

Составим рекурсивную функцию для вычисления степени с натуральным показателем n для любого вещественного числа a .

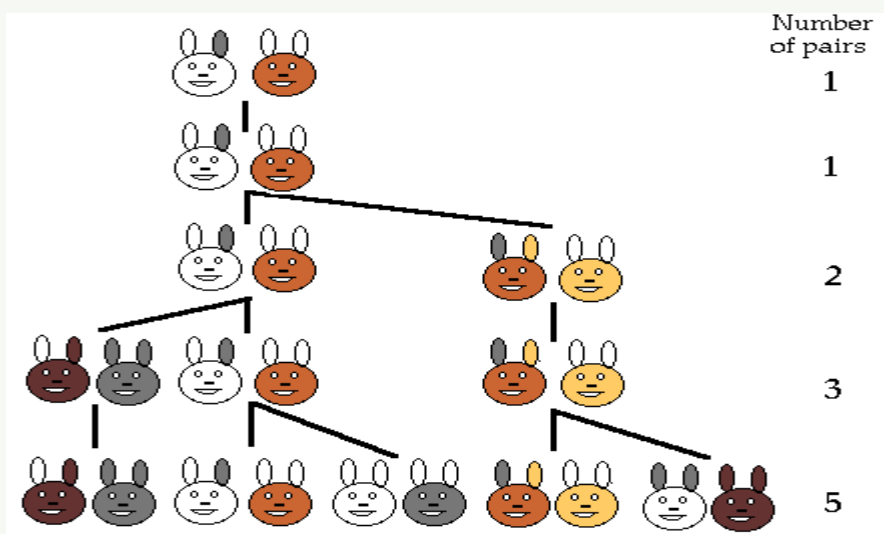
```
def st(a, n):  
    if (n == 1): return a  
    return a * st(a, n - 1)
```



ЗАДАЧА ПРО КРОЛИКОВ

В январе Саше подарили пару новорождённых кроликов. Через два месяца они дали первый приплод - новую пару кроликов, а затем давали приплод по паре кроликов каждый месяц.

Каждая новая пара также даёт первый приплод (пару кроликов) через два месяца, а затем - по паре кроликов каждый месяц. Сколько пар кроликов будет у Саши в декабре?



Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... образуют так называемую **последовательность Фибоначчи**, названную в честь итальянского математика, впервые решившего соответствующую задачу ещё в начале XIII века.

ФУНКЦИЯ ДЛЯ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

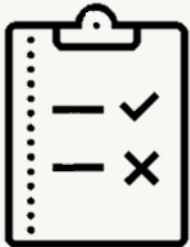
```
def f(n):  
    if n==1 or n==2:  
        rez = 1  
    else: rez = f(n - 1) + f(n - 2)  
    return rez
```



Полученная функция **рекурсивная** - в ней реализован способ вычисления очередного значения функции через вычисление её предшествующих значений.

Напишите программу для нахождения $f(12)$.

Измените программу так, чтобы она вычисляла и выводила 12 первых членов последовательности Фибоначчи.



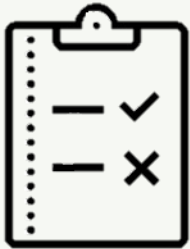
ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРСИИ ДЛЯ ПЕРЕБОРА ВАРИАНТОВ

Предположим, нам надо найти и вывести все возможные трёхбуквенные слова в трёхбуквенном алфавите А, В, С.

Для решения этой задачи можно организовать полный перебор всех вариантов с помощью вложенных циклов, когда в качестве первой, второй и третьей букв слова поочерёдно рассматривается каждая из букв трёхбуквенного алфавита:

```
alfabet = "ABC»  
for c1 in alfabet:  
    for c2 in alfabet:  
        for c3 in alfabet:  
            print(c1+c2+c3)
```





ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРСИИ ДЛЯ ПЕРЕБОРА ВАРИАНТОВ

Надо разработать такую программу, чтобы в ней сначала запрашивалась длина слова n , а затем выводились слова, состоящие из n символов в трёхбуквенном алфавите (A, B, C).

Для получения всех возможных слов длины n надо перебрать все возможные первые буквы длины n и каждую из них перебрать. Начнём с первой буквы алфавита — это 'A'. Буква 'A' — это первый символ слова. Если $n = 1$, то это слово. Если $n > 1$, то надо получить все слова длины $n - 1$ и добавить к каждой букве 'A', `alfabet`, `n`):

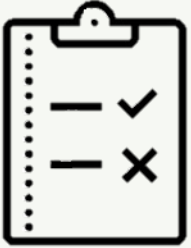
```
def allWord(word, alfabet, n):  
    if n == 0:  
        print(word)  
        return  
    for c in alfabet:  
        allWord(word+c, alfabet, n - 1)
```



Алгоритм, в котором прямо или косвенно содержится ссылка на него же как на вспомогательный алгоритм, называют рекурсивным.

Рекурсивная процедура — это процедура, которая вызывает сама себя, напрямую или через другие процедуры.

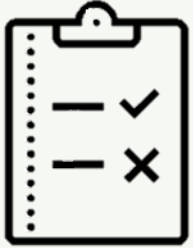
Рекурсивная функция — это функция, которая вызывает сама себя, напрямую или через другие функции.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Что такое рекурсия? Приведите 1–2 примера рекурсии из повседневной жизни.

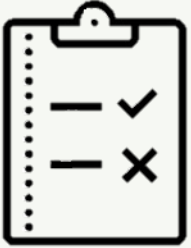




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Какие алгоритмы называются рекурсивными?

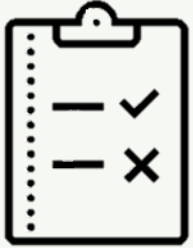




ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Чем рекурсивные функции отличаются от рекурсивных процедур?





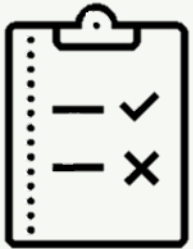
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Напишите программу вычисления выражения:

$$s = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

Используйте функцию вычисления факториала.





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

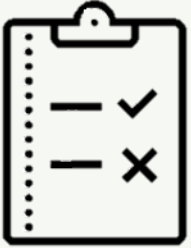
Напишите программу вычисления выражения:

$$s = x^3 + x^5 + x^n,$$

где x и n вводятся с клавиатуры.

Используйте функцию вычисления степени.





ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Дана программа на школьном алгоритмическом языке с двумя рекурсивными функциями F и G.

```
алг цел F(цел n)
нач
  если n > 3
    то
      знач := F(n - 2) + G(n - 3)
    иначе
      знач := 1
  все
кон
алг цел G(цел n)
нач
  если n > 3
    то
      знач := G(n - 2) + F(n - 3)
    иначе
      знач := 1
  все
кон
```

Какой результат получится при вызове функций F(7), F(8), G(7), G(8)?

