ИНФОРМАТИКА

СПО

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

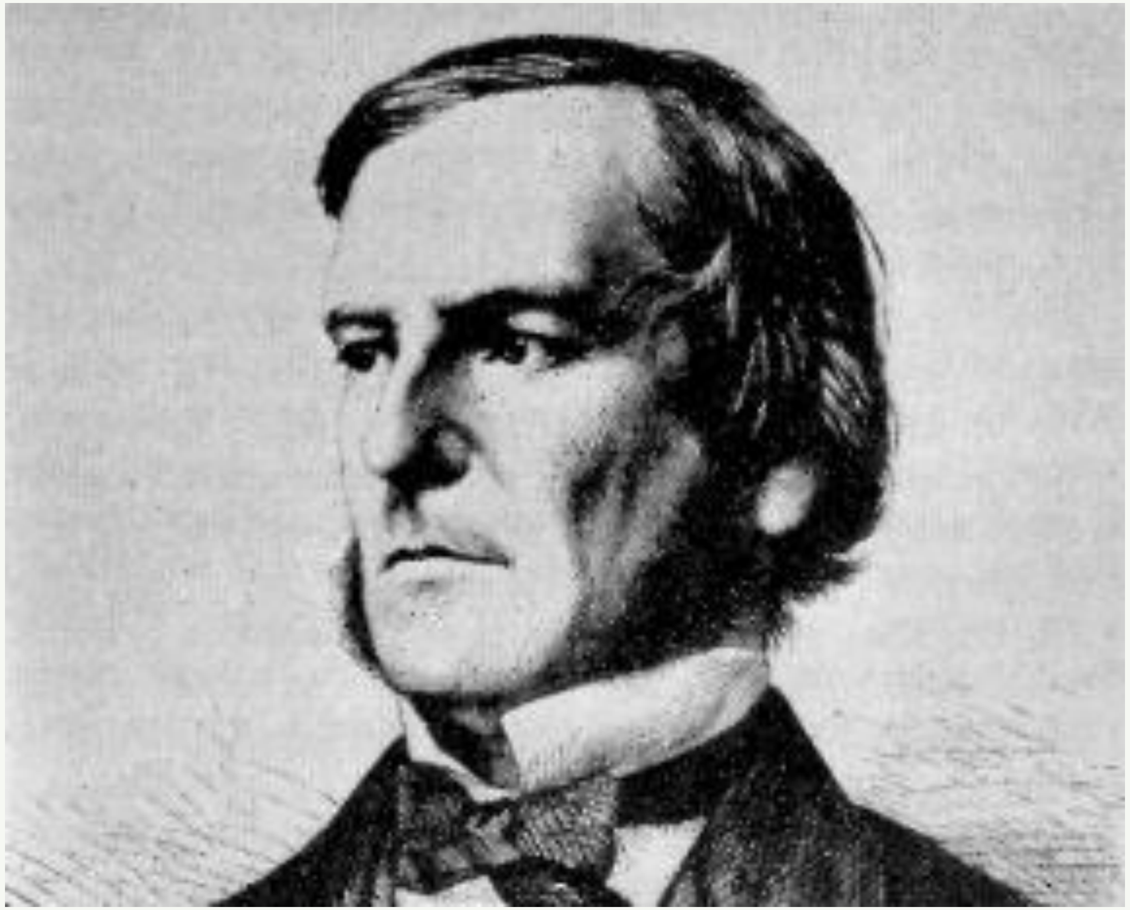
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- логическое высказывание
- логическая операция
- логическая переменная
- предикат

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Алгебра логики – раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.

Джордж Буль (1815-1864) – английский математик, основоположник алгебры логики.



Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов. В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ

Высказывание – это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывания, образованные из других высказываний, называются **составными**. Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется **элементарным**.

Обоснование истинности или ложности элементарных высказываний не является задачей алгебры логики.

А = «Джордж Буль – основоположник алгебры логики»

И

В = «2 + 2 = 5»

А и В

логические переменные

логическая связка

ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ

Логическая переменная – это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Истина	Ложь
И	Л
true	false
да	нет
1	0

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическая операция полностью может быть описана **таблицей истинности**, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Конъюнкция

Логическое умножение

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания.

Дизъюнкция

Логическое сложение

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Высказывание ложно тогда и только тогда, когда ложны оба исходных высказывания.

Инверсия

Отрицание

A	не A
0	1
1	0

Высказыванию ставится в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Импликация

Следование

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ложно тогда и только тогда, когда посылка (первое) истинна, а следствие (второе) ложно.

Пример высказывания:

Если верно списали пример, то получили верный ответ.

A: Пример списали верно

B: Получили верный ответ

В высказывании нет информации о правильности самого решения. Анализировать можно только то, что сказано в высказывании.

Если списали неверно, то ответ может быть любым.

Из ложной посылки можно получить истинное и ложное высказывание, из истинного только истинное.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Строгая дизъюнкция

Исключающая дизъюнкция

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Высказывание истинно тогда, когда только одно из двух исходных высказываний истинно.

Пример высказывания:

Сегодня мы пойдем либо в театр, либо в кино.

A: Мы пойдем в театр

B: Мы пойдем в кино

Невозможно отправиться в кино и в театр одновременно.

Но если не пойти в театр и не пойти в кино, высказывание будет ложным.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Эквиваленция

Равнозначность

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Высказывание истинно тогда, когда оба исходных высказывания истинны или оба исходных высказывания ложны.

Пример высказывания:

Аттестат об образовании выдается тогда и только тогда, когда выпускник успешно проходит государственную итоговую аттестацию.

A: Выдается аттестат
B: Успешное прохождение аттестации

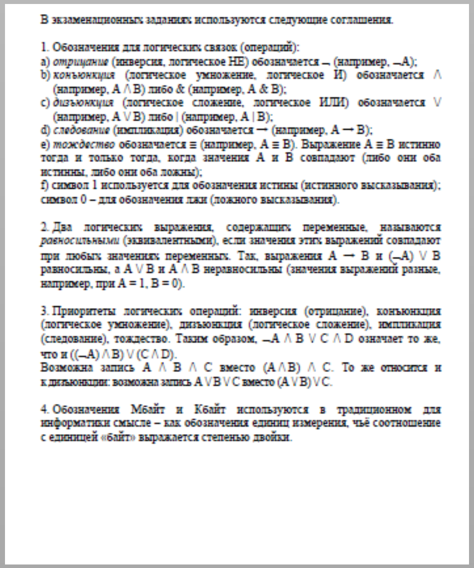
Два события взаимосвязаны. Получение аттестата без успешного прохождения процедуры ЕГЭ невозможно, как невозможно и обратное.

$$A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание, инверсия, лог. НЕ)	¬A, $\overline{A}$, not A, не A	«Не», «не верно, что»
Конъюнкция (лог. умножение, лог. И)	A ∧ B, A&B, A · B, AB, A и B, A and B	«И», «как …, так … «вместе с», «но», …
Дизъюнкция (лог. сложение, лог. ИЛИ)	A ∨ B, A + B, A | B, A ИЛИ B, A or B	«Или», «или …, и… или оба вмест…
Строгая дизъюнкция (искл. дизъюнкция, искл. ИЛИ)	A ⊕ B, A xor B	«Либо …, либо», «… … или только…
Импликация (лог. следование)	A → B, A ⇒ B	«Если …, то», «и… следует», «влеч…
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	A ↔ B, A ⇔ B, A ≡ B	«Эквивалентно», «необходимо и достаточно»

Инструкция ЕГЭ



В экзаменационных заданиях используются следующие соглашения.

1. Обозначения для логических связок (операций):
a) *отрицание* (инверсия, логическое НЕ) обозначается ¬ (например, ¬A);
b) *конъюнкция* (логическое умножение, логическое И) обозначается ∧ (например, A ∧ B) либо & (например, A & B);
c) *дизъюнкция* (логическое сложение, логическое ИЛИ) обозначается ∨ (например, A ∨ B) либо | (например, A | B);
d) *следование* (импликация) обозначается → (например, A → B);
e) *тождество* обозначается ≡ (например, A ≡ B). Выражение A ≡ B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают (либо они оба истинны, либо они оба ложны);
f) символ 1 используется для обозначения истины (истинного высказывания); символ 0 – для обозначения лжи (ложного высказывания).

2. Два логических выражения, содержащих переменные, называются *равносильными* (эквивалентными), если значения этих выражений совпадают при любых значениях переменных. Так, выражения A → B и (¬A) ∨ B равносильны, а A ∨ B и A ∧ B неравносильны (значения выражений разные, например, при A = 1, B = 0).

3. Приоритеты логических операций: инверсия (отрицание), конъюнкция (логическое умножение), дизъюнкция (логическое сложение), импликация (следование), тождество. Таким образом, ¬A ∧ B ∨ C ∧ D означает то же, что и ((¬A) ∧ B) ∨ (C ∧ D).
Возможна запись A ∧ B ∧ C вместо (A ∧ B) ∧ C. То же относится и к дизъюнкции: возможна запись A ∨ B ∨ C вместо (A ∨ B) ∨ C.

4. Обозначения Мбайт и Кбайт используются в традиционном для информатики смысле – как обозначения единиц измерения, чьё соотношение с единицей «байт» выражается степенью двойки.

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Составное логическое высказывание можно пред-ставить в виде логического выражения (формулы), со-стоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Для логического выражения справедливо:

- всякая логическая переменная, а также логические константы (0, 1), есть логическое выражение
- если *A* – логическое выражение, то и $\overline{A}$ – логическое выражение
- если *A* и *B* – выражения, то связанные любой бинарной операцией они также представляют собой логическое выражение

Приоритет: Не → И → Или, Либо → Следует, Равносильно

ПРИМЕР 1

Проверить, удовлетворяет ли слово ***ОКНО*** логическому условию: если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1	A_2	A_{n-1}	A_n
О	К	Н	О
1	0	0	1

A_1- первая буква гласная,

A_n- последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним вычисления.

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{1} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (0 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$1$$

Ответ: Да

ПРИМЕР 2

Выясним, какие из приведённых слов удовлетворяют логическому условию (первая буква согласная → вторая буква согласная) & (последняя буква гласная → предпоследняя буква гласная):

1) ОЗОН; 3) МАФИЯ; 2) ИГРА; 4) ТРЕНАЖ.

Решение: Вычислим значение логического выражения для каждого из данных слов:

1) $(0 \rightarrow 1) \,\&\, (0 \rightarrow 1) = 1 \,\&\, 1 = 1$;
2) $(0 \rightarrow 1) \,\&\, (1 \rightarrow 0) = 1 \,\&\, 0 = 0$;
3) $(1 \rightarrow 0) \,\&\, (1 \rightarrow 1) = 0 \,\&\, 1 = 0$;
4) $(1 \rightarrow 1) \,\&\, (0 \rightarrow 1) = 1 \,\&\, 1 = 1$.

ПРИМЕР 3

Приведите пример слова, которое НЕ удовлетворяет логическому условию:

если первая буква гласная или вторая гласная, но не обе вместе, то из того, что последняя буква согласная, следует, что предпоследняя буква гласная.

Решение: Введем условные обозначения:

A_1- первая буква гласная,

A_n- последняя буква гласная,

$\overline{A_1}$ означает, что первая буква согласная.

Запишем условие задачи на языке формальной логики:

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow (\overline{A_n} \longrightarrow A_{n-1})$$

Выполним преобразования, разбирая выражение с конца.

A_1	A_2	A_{n-1}	A_n
Р	О	С	Т
1	0	0	0

$$1 \oplus 0 \longrightarrow (\overline{0} \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0)$$

$$1 \longrightarrow 0$$

$$0$$

Ответ: РОСТ

ПРИМЕР 4

Выясним, сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}) \vee (\overline{B} \,\&\, C \,\&\, D) = 1.$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = 1 \\ \overline{B} \,\&\, C \,\&\, D = 1 \end{array}\right.$$

$A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$, $D = 1$

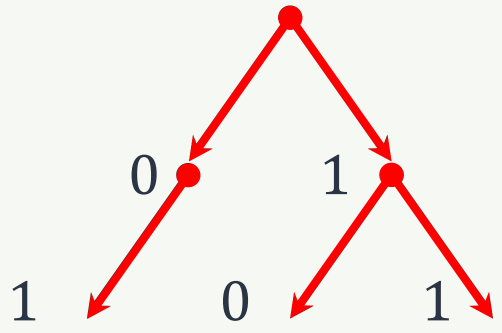
ПРИМЕР 5

Сколько решений имеет логическое уравнение

$$(x_1 \to x_2) \vee (x_3 \equiv x_4) = 1$$

Решение: Введем замену переменных

$$\begin{matrix} t_1 = x_1 \to x_2 \\ t_2 = x_3 \equiv x_4 \end{matrix} \Longrightarrow t_1 \vee t_2 = 1$$



t_1		

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 14$

Ответ: 14

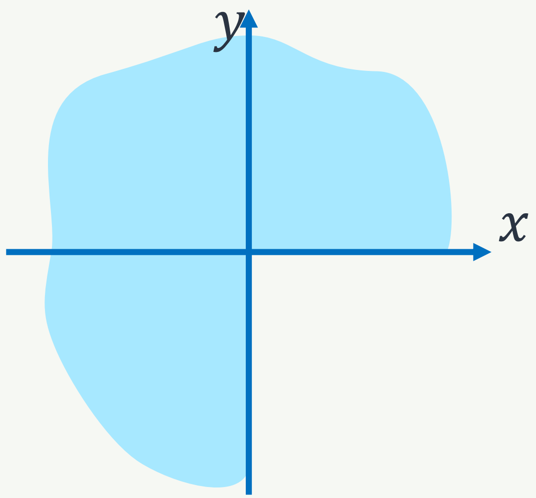
ПРЕДИКАТЫ И МНОЖЕСТВА ИСТИННОСТИ

Предикат – это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Предикаты позволяют задать множество, не перечисляя всех его элементов.

Предикат $P(x) = (x < 0)$описывает множество отрицательных чисел.

Какое множество на координатной плоскости задает предикат $P(x) = (x \leq 0) \vee (y \geq 0)$?



ПРИМЕР 6

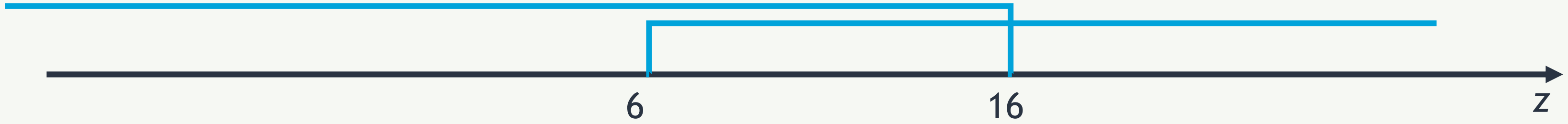
Найдём все целые числа z, превращающие предикат

$P(z) = (z > 5)\ \&\ (z - 2 < 15)$

в истинное высказывание. Другими словами, требуется найти множество истинности предиката $P(z)$, заданного на множестве целых чисел Z.

Решение: Предикат $P(z)$ состоит из двух предикатов, соединённых операцией конъюнкции: $P(z) = A(z)\ \&\ B(z)$.

Множеством истинности предиката $A(z) = (z > 5)$ являются целые числа 6, 7, 8 и т. д. Множеством истинности предиката $B(z) = (z - 2 < 15)$ являются все целые числа, меньшие 17.



Множество истинности исходного предиката — пересечение (общие элементы) множеств истинности образующих его предикатов:

$$P = A \cap B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}.$$

Его мощность $|P| = 11$.

ПРИМЕР 7

Рассмотрим предикат $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$, определённый на множестве целых чисел. Найдём множество истинности этого предиката.

Зачастую задания такого рода формулируют иначе. Например, так: «Найдите все целые числа x, для которых истинно высказывание $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$.

Решение: Проанализируем отдельно каждый из элементарных предикатов, решив неравенства:

$50 < x^2$ истинно для всех целых $x \in]-\infty; -8] \cup [8; +\infty[$;

$50 > (x + 1)^2$ истинно для всех целых $x \in [-8; 6]$.

$x \in Z$	$50 < x^2$	$50 > (x + 1)^2$	$(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$
$]-\infty; -9]$	1	0	0
-8	1	1	1
[-7; 6]	0	1	1
7	0	0	1
$[8; +\infty[$	1	0	0

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Высказывание — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными (сложными). Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным (простым). Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Логические операции имеют следующий приоритет:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

Предикат — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Логические переменные		Логические операции					
		Отрицание	Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Строгая дизъюнкция	Эквиваленция
A	B	$\overline{A}$	$A \,\&\, B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Из данных предложений выберите то, которое является высказыванием. Обоснуйте свой выбор.

1) Как пройти в библиотеку?
2) Коля спросил: «Который час?»
3) Картины Пикассо слишком абстрактны.
4) Компьютеры могут быть построены только на основе двоичной системы счисления.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Из трёх высказываний выберите два, являющихся отрицаниями друг друга:

а) «$1999 < 2000$», «$1999 > 2000$», «$1999 \leq 2000$»;

б) «Петя решил все задания контрольной работы», «Петя не решил все задания контрольной работы», «Петя решил не все задания контрольной работы»;

в) «Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна не является спутником Земли»;

г) «Прямая a не параллельна прямой c», «Прямая a перпендикулярна прямой c», «Прямые a и c не пересекаются» (считаем, что прямые a и c лежат в одной плоскости);

д) «Мишень поражена первым выстрелом», «Мишень поражена не первым выстрелом», «Неверно, что мишень поражена не первым выстрелом»

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Рассмотрите следующие элементарные высказывания:

A = «Река Днепр впадает в Чёрное море»,
B = «45 — простое число»,
C = «Вена — столица Австрии»,
D = «0 — натуральное число».

Определите, какие из них истинные, а какие — ложные. Составьте сложные высказывания, применяя каждый раз только одну из пяти логических операций (¬, &, ∨, →, ↔) к высказываниям *A*, *B*, *C* и *D*. Сколько новых высказываний можно получить с помощью отрицания (инверсии)? Конъюнкции? Дизъюнкции? Импликации? Эквиваленции? Сколько всего новых высказываний можно получить? Сколь- ко среди них будет истинных?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Представьте пословицу в виде сложного логического высказывания, построенного на основе простых высказываний. Ответ обоснуйте при помощи таблиц истинности.

а) На вкус и цвет товарищей нет.

б) Если долго мучиться, что-нибудь получится.

в) Не зная броду, не суйся в воду.

г) Тяжело в учении, легко в бою.

д) То не беда, что во ржи лебеда, то беда, что ни ржи, ни лебеды.

е) Где тонко, там и рвётся.

ж) Либо грудь в крестах, либо голова в кустах.

з) За двумя зайцами погонишься — ни одного не поймаешь.

и) И волки сыты, и овцы целы.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Подберите вместо *A*, *B*, *C*, *D* такие высказывания, чтобы полученное сложное высказывание имело смысл:

а) если (*A* или *B* и *C*), то *D*;

б) если (не *A* и не *B*), то (*C* или *D*);

в) (*A* или *B*) тогда и только тогда, когда (*C* и не *D*).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Вычислите:

а) $1 \lor X \& 0$;

б) $X \& X \& 1$;

в) $0 \& X \lor 0$;

г) $0 \lor X \& X$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько из приведённых чисел Z удовлетворяют логическому условию:

$((Z$ кратно $4) \lor (Z$ кратно $5)) \rightarrow (Z$ кратно $6)$?

Числа: 4, 6, 7, 12.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Найдите все целые числа *Z*, для которых истинно высказывание:

а) $\overline{(Z > 5)}$ & $(Z^2 < 100)$;

б) $\overline{(Z > 5) \rightarrow (Z>10)}$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Какие из высказываний *A*, *B*, *C* должны быть истинны и какие ложны, чтобы было ложно следующее высказывание?

а) $((\overline{A} \vee B) \,\&\, B) \rightarrow C$;

б) $\overline{A \,\&\, B} \leftrightarrow 1$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Даны три числа в различных системах счисления:

A=2310, *B*=238, *C*=1A16.
Переведите *A, B* и *C* в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции (*A* ∨ *B*) & *C*. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Логическое отрицание (поразрядное) восьмиразрядного двоичного числа, записанное в десятичной системе счисления, равно 217. Определите исходное число в десятичной системе счисления.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Определите логическое произведение и логическую сумму (поразрядные) всех двоичных чисел в диапазоне от 16_{10} до 22_{10}, включая границы. Ответ запишите в восьмеричной системе счисления.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько различных решений имеет логическое уравнение?

а) $(A \vee B \vee C)\ \&\ (\overline{B}\ \&\ \overline{C}\ \&\ D)=1$;

б) $(A \vee B \vee C) \vee (\overline{B}\ \&\ C\ \&\ D)=0$;

в) $(A \rightarrow C) \vee (B\ \&\ A) \vee (D \rightarrow B\ \&\ C)=0$;

г) $(A\ \&\ B\ \&\ C) \rightarrow (C\ \&\ D)=1$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько решений имеет логическое уравнение $x_1 \& x_2 \vee x_3 \& x_4 = 1$?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Изобразите в декартовой прямоугольной системе координат множество истинности для следующего предиката:

а) $P(x, y)=(y \geq x)\ \&\ (y + x \geq 0)\&(y \leq 1)$;

б) $P(x, y)=(|x| \leq 1)\ \&\ (|y| \leq 1)$;

в) $P(x, y)=(x2 + y2 \leq 4)\ \&\ (x2 + y2 \geq 1)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Предикат $((8x - 6) < 75) \to (x\,(x - 1) > 65)$ определён на множестве целых чисел. Найдите его множество истинности. Укажите наибольшее целое число x, при котором предикат превращается в ложное высказывание.