ИНФОРМАТИКА

СПО

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

- законы алгебры логики
- коммутативные законы
- ассоциативные законы
- дистрибутивные законы
- закон противоречия
- закон идемпотентности
- закон двойного отрицания
- законы де Моргана
- законы поглощения

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Законы алгебры логики (свойства логических операций) позволяют упростить процесс анализа истинности логического выражения с большим количеством переменных и операций.

Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \& \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Все законы могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Законы де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$	$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Доказательство закона де Моргана

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \,\&\, \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Переместительные законы	A v B = B v A	A & B = B & A

Упростить выражения: A v A & B; A & (A v B)

A v A & B = A &1 v A & B = A & (1 v B) = A & 1 = A

Закон поглощения (I)	A v (A & B) = A

A & (A v B) = A & A v A & B = A v A & B = A

Закон поглощения (II)	A & (A v B) = A

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Распределительный (дистрибутивный) закон (II)	A v (B & C) = (A v B) & (A v C)

(A v B) & (A v C)

(A v B) & A v (A v B) & C

A & (A v B) v C & (A v B)

A v C & (A v B)

A v A & C v C & B

A v B & C

Доказательство

A & (B v C) = (A & B) v (A & C)

Переместительный
A & B = B & A

Поглощения
A & (A v B)=A

Распределительный
A & (B v C) = (A & B) v (A & C)

Поглощения
A v A & B = A

ПРИМЕР 1

Упростим логическое выражение $A \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C}$.

$$A \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C} = A \& B \& (C \vee \overline{C}) = A \& B \& 1 = A \& B$$

ПРИМЕР 2

Упростим логическое выражение $(A \lor B)\ \&\ (A \lor B \lor C)\ \&\ (A \lor B \lor \overline{C})$.

$$(A \lor B)\ \&\ (A \lor B \lor C)\ \&\ (A \lor B \lor \overline{C}) = (A \lor B)\ \&\ (0 \lor C \lor \overline{C}) = (A \lor B)\ \&\ 1 = A \lor B$$

ПРИМЕР 3

На числовой прямой даны отрезки B = [5; 10], C = [3; 20] и D = [15; 25]. Найти целое число – длину отрезка A, чтобы предикат

$$((x \in D) \to (x \in C)) \to ((x \in A) \to (x \notin A)\ \&\ (x \in B))$$

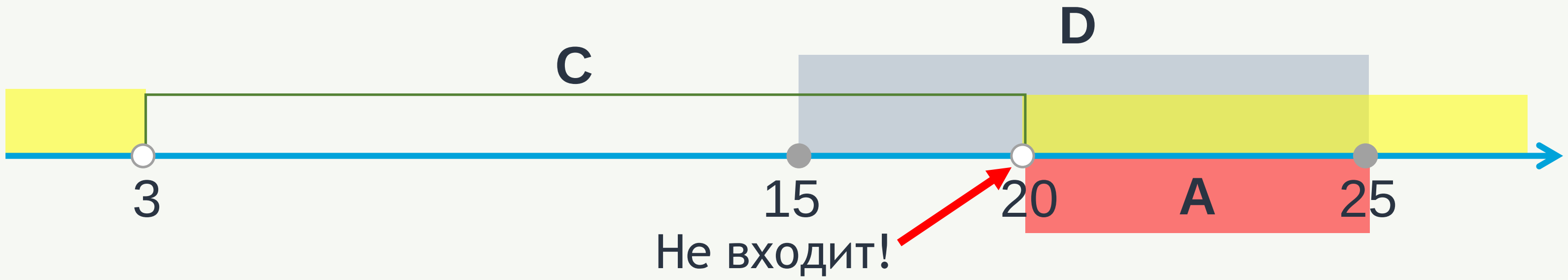
становился истинным высказыванием при любых значениях x. Если ответов несколько, то выбрать отрезок максимальной длины.

Заменим предикаты вида $x \in M$ на M (высказывание, обозначенное соответствующей буквой множества) и выполним преобразования:

$$(D \to C) \to (A \to \overline{A}\ \&\ B) = \overline{\overline{D} \lor C} \lor (\overline{A} \lor \overline{A}\ \&\ B) = (\overline{\overline{D}}\ \&\ \overline{C}) \lor \overline{A} = (D\ \&\ \overline{C}) \lor \overline{A}$$

Законы алгебры логики выполняются для операций объединения, пересечения и дополнения множеств. $D \cap \overline{C} \cup \overline{A} = U$ Ответ не зависит от отрезка B

$A \cup \overline{A} = U$ $D \cap \overline{C} = A$



Ответ: 4

ПРИМЕР 4

На числовой прямой даны отрезки $B = [2; 12]$ и $C = [7; 18]$. Каким должен быть отрезок A, чтобы предикат $(x \in A) \vee ((x \in B) \rightarrow (x \in C))$ становился истинным высказыванием при любых значениях x?

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \rightarrow (x \in C)) = (x \in A) \vee ((\overline{x \in B}) \vee (x \in C)) =$$

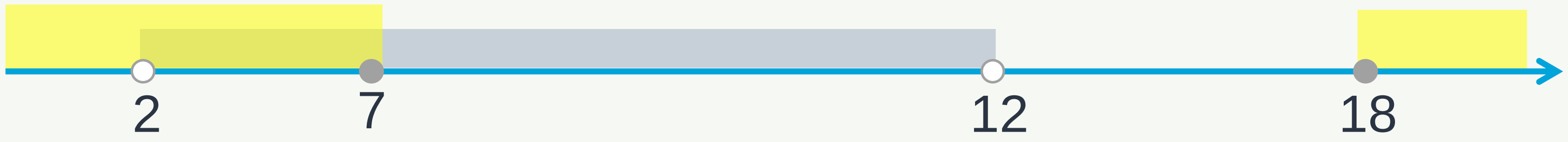
$$=(x \in A) \vee (\overline{x \in B}) \vee (x \in C)$$

A, B и C – множества $\quad A \vee \overline{B} \vee C = \mathrm{U}$

Известно, что $A \vee \overline{A} = \mathrm{U}$ $\quad \overline{A} = \overline{B} \vee C$ $\quad A = \overline{\overline{B} \vee C}$ минимально возможное множество A

Множество B — это отрезок [2; 12].

Множество C — это промежутки]–∞; 7[и]18; +∞[.



ПРИМЕР 5

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа *a* выражение

$(x \,\&\, 28 \neq 0 \vee x \,\&\, 45 \neq 0) \rightarrow (x \,\&\, 17 = 0 \rightarrow x \,\&\, a \neq 0)$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной *x*)? Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.

$27 - 11011_2$, $22 = 10110_2$ $\quad 27 \,\&\, 22 = 11011 \,\&\, 10110 = 10010_2 = 18_{10}$

$$\begin{array}{r} \& \begin{array}{r} 11011 \\ 10110 \end{array} \\ \hline 10010 \end{array}$$

Введём обозначения: $M(x) = (x \,\&\, 28 \neq 0)$, $N(x) = (x \,\&\, 45 \neq 0)$,
$K(x) = (x \,\&\, 17 = 0)$, $A(x) = (x \,\&\, a \neq 0)$.

$(M(x) \vee N(x)) \rightarrow (K(x) \rightarrow A(x)) = \overline{M(x) \vee N(x)} \vee \overline{K(x)} \vee A(x) =$

$= \overline{(M(x) \vee N(x)) \,\&\, K(x)} \vee A(x)$

ПРИМЕР 5

Рассмотрим предикат $M(x) = (x \,\&\, 28 \neq 0)$.

1 бит

11100_2

0 бит

Если и 4-й, и 3-й, и 2-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \,\&\, 28 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $N(x) = (x \,\&\, 45 \neq 0)$. 101101_2

Если и 5-й, и 3-й, и 2-й, и 0-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \,\&\, 45 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $K(x) = (x \,\&\, 17 = 0)$. 10001_2

Побитовая конъюнкция 17 и x будет равна нулю, если в числе x 4-й и 0-й биты будут содержать нули. Множество истинности этого предиката — все x с нулями в 4-м и 0-м битах.

$\overline{(M \vee N) \,\&\, K} \vee A = U$ $\quad A \vee \overline{A} = U$ $\quad A = (M \vee N) \,\&\, K$

Объединением множеств M и N являются все двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 4, 3, 2, 0 содержит единицу. Пересечением этого множества с множеством K будут все двоичные числа, у которых биты с номерами 4 и 0 будут заняты нулями, т. е. такие двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 содержит 1. Все эти числа образуют множество А.

Искомое число a должно быть таким, чтобы при любом неотрицательном целом значении переменной x: $x \,\&\, a \neq 0$, и кроме того, оно должно быть минимальным из возможных. **Требуемое число $101100_2 = 44_{10}$.**

ПРИМЕР 6

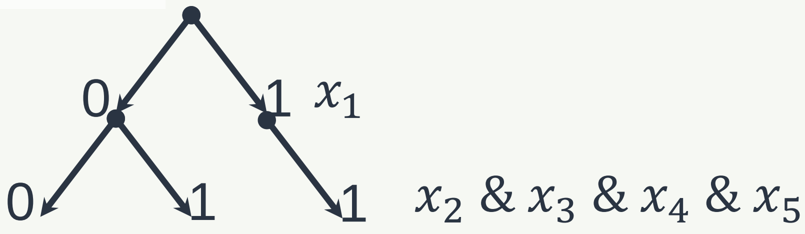
Сколько решений имеет система уравнений:

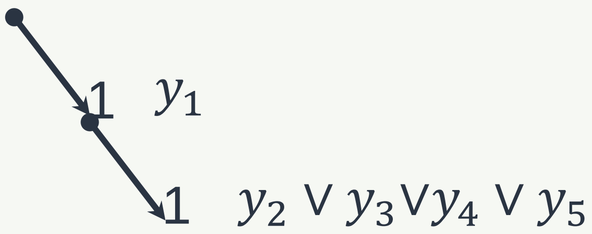
$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)\ \&\ (x_1 \to x_3)\ \&\ (x_1 \to x_4)\ \&\ (x_1 \to x_5) = 1 \\ (y_1\ \&\ y_2) \vee (y_1\ \&\ y_3) \vee (y_1\ \&\ y_4) \vee (y_1\ \&\ y_5) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x_1} \vee x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 1 \\ y_1\ \&\ (y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5) = 1 \end{cases}$$

Замена импликаций и применение распределительных законов к обоим уравнениям.

Количество решений первого уравнения не влияет на количество решений второго уравнения.





$1{\cdot}15 + 1{\cdot}1 + 1{\cdot}1 = 17$

$1{\cdot}15 = 15$

$x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 0$ в 15 случаях.

$x_2\ \&\ x_3\ \&\ x_4\ \&\ x_5 = 1$ в единственном случае

$17 \cdot 15 = 255$

$y_2 \vee y_3 \vee y_4 \vee y_5 = 1$ в 15 случаях.

Ответ: 255

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

Для n = 2 существует 16 различных логических функций.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

0000

0001

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F(A,B)=0$

$F(A,B)=A \,\&\, B$

$F(A,B)=\overline{A \to B}$

$F(A,B)=A$

$F(A,B)=\overline{B \to A}$

$F(A,B)=B$

?

?

$F(A,B)=A \mid B=\overline{A \,\&\, B}$

штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ)

$F(A,B)=A \downarrow B=\overline{A \vee B}$

стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ)

СОСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных. Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{A} \& \overline{B} \& C$
0	1	0	1	$\overline{A} \& B \& \overline{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A \& \overline{B} \& C$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

II способ

При построении функции можно ориентироваться как на 0, так и на 1 в последнем столбце.

F=1, если во 2-ой, **ИЛИ** в 3-ей, **ИЛИ** в 6-ой строке стоят 1.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка.

$$F=\overline{A} \& \overline{B} \& C \vee \overline{A} \& B \& \overline{C} \vee A \& \overline{B} \& C$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Используя законы логики, можно записать функцию через другие операции.

СОСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ПО ТАБЛИЦЕ ИСТИННОСТИ И ЕГО УПРОЩЕНИЕ

Алгоритм составления логического выражения по таблице истинности достаточно прост. Для этого надо:

1) отметить в таблице истинности наборы переменных, при которых значение логического выражения равно единице;
2) для каждого отмеченного набора записать конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание;
3) все полученные конъюнкции связать операциями дизъюнкции.

ПРИМЕР 7

Имеется следующая таблица истинности:

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{A} \& B \& \overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A} \& B \& C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	$A \& B \& \overline{C}$
1	1	1	0	

$$\overline{A} \& B \& \overline{C} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C} = B \&(\overline{A} \& \overline{C} \vee \overline{A} \& C \vee A \& \overline{C} =$$

$$= B \&(\overline{A} \& (\overline{C} \vee C) \vee A \& \overline{C} = B \&(\overline{A} \& 1 \vee A \& \overline{C} = B \&(\overline{A} \vee A \& \overline{C} =$$

$$= B \&(\overline{A} \vee A) \&(\overline{A} \vee \overline{C}) = B \& 1 \& (\overline{A} \vee \overline{C}) =$$

$$= B \& (\overline{A} \vee \overline{C}) = B \& \overline{A \& C}$$

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, так как за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Какие из рассмотренных законов алгебры логики аналогичны законам алгебры чисел, а какие — нет?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Докажите второй закон де Моргана с помощью таблиц истинности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Путём преобразования докажите равносильность высказываний:

а)$\overline{(A \& \overline{B}) \vee (B \& \overline{C})}$ и $(\overline{A} \& \overline{B}) \vee (\overline{A} \& C) \vee (B \& C)$;

б)$(A \& B) \vee \overline{(A \& \overline{C})}$ и $(A \& B) \vee \overline{A} \vee C$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Упростите логическую формулу:

а) $(A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}) \lor (A \,\&\, B \,\&\, C) \lor (A \,\&\, B)$;

б) $(A \,\&\, B \lor A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} \lor B \,\&\, \overline{C} \lor C) \,\&\, (\overline{C} \lor A \,\&\, C \lor \overline{A} \,\&\, B \,\&\, \overline{C})$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Найдите X, если $\overline{(X \vee A)} \vee \overline{(X \vee \overline{A})} = B$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10; 25]$ и $Q = [20; 55]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что выражение

$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$ истинно при любом значении переменной x.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём $P=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $Q=\{2, 6, 12, 18, 24\}$.

Известно, что выражение $(x \in Q) \rightarrow (\overline{x \in A}) \rightarrow \overline{(x \in P)})$ истинно при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

На числовой прямой даны два отрезка:

$M = [10; 60]$ и $N = [40; 80]$. Укажите наименьшую возможную длину та- кого отрезка A, что выражение

$(x \in M) \to (((x \in N) \,\&\, \overline{(x \in A)}) \to \overline{(x \in M)})$ истинно при любом значении переменной x.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа A формула $x \mathbin{\&} 25 \neq 0 \rightarrow (x \mathbin{\&} 17 = 0 \rightarrow x \mathbin{\&} A \neq 0)$ тождественно истинна, т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x? (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Определите наибольшее натуральное десятичное число A, при котором выражение

$$((x \,\&\, 46 = 0) \lor (x \,\&\, 18 = 0)) \to ((x \,\&\, 115 \neq 0) \lor (x \,\&\, A = 0))$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любом натуральном значении десятичной переменной x. (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько различных решений имеет система уравнений?

а) $\begin{cases} x_1 \,\&\, x_2 \rightarrow x_3 \,\&\, x_4 = 1; \\ \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \,\&\, x_6 = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \,\&\, x_4 = 1; \\ \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \,\&\, x_6 = 1; \\ \overline{x_5} \vee \overline{x_6} \vee x_7 \,\&\, x_8 = 1; \\ \overline{x_7} \vee \overline{x_8} \vee x_9 \,\&\, x_{10} = 1. \end{cases}$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Сколько существует различных логических функций от четырёх переменных?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.

A	B	F_1	F_2
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По известным таблицам истинности запишите аналитическое представление импликации, эквиваленции и строгой дизъюнкции.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Логические функции **штрих Шеффера** и **стрелка Пирса** названы так в честь математиков, исследовавших их свойства. Подготовьте краткую биографическую справку об одном из этих учёных.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.

A	B	C	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

Запишите логическое выражение для логической функции F (A, B, C), равной 1 на наборах 011, 101, 110, 111. Попытайтесь упростить полученное выражение.